Beiträge zur Kenntnis der Kugelfunkenstrecke.

Dissertation

zur

Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs.

Der

Königlichen Technischen Hochschule zu Berlin

vorgelegt am 8. Dezember 1913

von

Dipl.-Ing. **Walther Estorff**
aus Berlin.

Genehmigt am 30. Juni 1914.

Berlin 1915.

Referent: Geh. Reg.-Rat Professor Dr. W. Wedding.
Korreferent: Professor Dr.-Ing. M. Kloss.



Inhaltsverzeichnis.

Es sei dem Verfasser gestattet, an dieser Stelle den Herren Geh. Reg.-Rat Professor Dr. W. Wedding und Professor Dr.-Ing. M. Kloß, die ihm in entgegenkommender Weise die reichen Hülfsmittel ihrer Laboratorien zur Verfügung stellten, seinen ergebensten Dank auszusprechen.

Ebenso dankt der Verfasser den Herren Professor Dr.-Ing. W. Reichel und Privatdozent Regierungsbaumeister M. Gerstmeyer für das große Interesse, welches sie seiner Arbeit entgegenbrachten.

Beiträge zur Kenntnis der Kugelfunkenstrecke.

Von Dipl.-Ing. **Walther Estorff.**

Einleitung.

Zur Messung der Höchstwerte hoher Wechselspannungen dienen die Meßfunkenstrecken. Entweder wird die Abhängigkeit der Funkenspannung von der Schlagweite durch Versuch bestimmt und in Kurvenform aufgetragen oder rechnerisch auf die Durchschlagsfestigkeit der Luft und die Gestaltung des elektrischen Feldes zurückgeführt. Zu den Funkenstrecken ersterer Art gehört die Spitzenfunkenstrecke, die Anordnung Spitze-Platte usw.

Ein Beispiel der letzteren Art stellt die Zylinderfunkenstrecke dar, die für Messungen, welche große Genauigkeit erfordern, unentbehrlich geworden ist. Der Einfluß äußerer Feldstörungen fällt, wenn man von den Randwirkungen absieht, bei dieser Funkenstrecke vollkommen fort, und die mathematisch genau bekannte Feldverteilung erlaubt eine Berechnung der Funkenspannung unter Zugrundelegen einer einmal festgestellten Abhängigkeit der Luftfestigkeit von dem Durchmesser der verwendeten inneren Zylinder. Für größere Meßbereiche nimmt diese Funkenstrecke ziemlich unhandliche Abmessungen an. Zugleich mit dem Durchmesser muß auch die Länge der Zylinder vergrößert werden, und damit wächst die Kapazität der Anordnung.

Technisch einfacher gestaltet sich die Messung unter Verwendung von Funkenstrecken zwischen Spitzen und Körpern einfacher geometrischer Form. Gegenüber der Zylinderfunkenstrecke unterliegen diese Anordnungen Störungen des ausgebildeten elektrischen Feldes durch Körper in der Umgebung und durch die eigenen Zuleitungen.

Der allgemeinen Anwendung der Spitzenfunkenstrecke stehen verschiedene Schwierigkeiten im Wege. So ist die Funkenspannung im Gebiete der Anfangsspannung außerordentlich stark von der Schärfe der Spitzen abhängig, während für höhere Meßbereiche ein Unsicherheitsgebiet besteht mit keiner bestimmten Abhängigkeit zwischen Spannung und Schlagweite. Der eigentliche Verwendungsbereich der Spitzenfunkenstrecke liegt in dem Gebiete, wo die Funkenspannung mit der Büschelgrenzspannung zusammenfällt. Bemerkenswert ist hier der starke Einfluß der Luftfeuchtigkeit, der neben Temperatur und Luftdruck für die Berichtigung der Spannungsmessungen zu berücksichtigen ist. Der Einfluß der Zuleitungen auf die Form des elektrischen Feldes scheint für die verschiedenen Anordnungen so bedeutend zu sein, daß jede derartige Funkenstrecke besonders geeicht werden sollte. Es muß als vergeblich erscheinen,

die Spitzenfunkenstrecke im Gebiete der Büschelgrenzspannung rechnerisch behandeln zu wollen, da die Glimm- und Büschelentladungen die Spitzen mit gut leitenden Hüllen ionisierter Luft umgeben, so daß für eine Berechnung völlig anders gestaltete Gebilde, als z. B. kegelförmige Elektroden, in Betracht kämen.

Trotzdem wird die Spitzenfunkenstrecke für gewisse Zwecke, bei denen es auf eine möglichst kleine Eigenkapazität der Elektroden ankommt, z. B. zur Messung der Höhe von Ueberspannungen, nicht zu umgehen sein.

Anders liegen die Verhältnisse bei der oben noch nicht erwähnten Kugelfunkenstrecke. Hier liegt die Möglichkeit vor, durch Wahl geeigneter Kugeldurchmesser stets innerhalb des Gebietes der Anfangsspannung zu bleiben und, wie im folgenden gezeigt werden soll, die Kugelgestalt der Elektroden den Feldberechnungen zugrunde zu legen. Es soll hier vorausgeschickt werden, daß lediglich Funkenspannungen beobachtet werden sollen.

Der Verfasser hat es sich zur Aufgabe der vorliegenden Abhandlung gemacht, die Feldverteilung zwischen zwei symmetrischen Kugelelektroden zu untersuchen, und zwar besonders auf der für den Durchbruch der Luft in Frage kommenden Verbindungslinie der beiden Kugelmittelpunkte. Es sollen fernerhin auch die Störungen des elektrischen Feldes durch die Zuleitungen näher behandelt und die Zusammenhänge zwischen der geometrischen Anordnung der Elektroden und der Luftfestigkeit festgestellt werden. Das Endziel besteht in dem Aufstellen einer Formel, die in einfacher Weise die Funkenspannung zwischen den beiden Kugeln aus Schlagweite, Kugeldurchmesser und der Festigkeit der Luft berechnen läßt.

In der Erkenntnis, daß sich die systematische Erforschung der Hochspannungsfragen auf der Festigkeitslehre der Dielektrika aufbaut, beschäftigt sich die vorliegende Arbeit dementsprechend in erster Linie mit der elektrischen Festigkeit des wichtigsten Isolators, der atmosphärischen Luft. Bei der mathematischen Behandlung des elektrischen Feldes stützte sich der Verfasser auf die einschlägigen Untersuchungen mehrerer Forscher, deren im folgenden Erwähnung getan werden soll.

Das elektrische Feld zwischen zwei geladenen Kugeln ist schon seit langer Zeit der Gegenstand eingehender mathematischer Untersuchungen gewesen. Poisson hat im Jahre 1811 die Verteilung der Ladung auf der Kugeloberfläche untersucht, und Plana hat im Jahre 1861 die aufgestellten Formeln weiter ausgebaut. Die gleiche Aufgabe wurde von Kirchhoff auf einfacherem Wege gelöst. Maxwell hat Verfahren zur zeichnerischen Ermittlung der Kraftlinienbilder zwischen zwei geladenen Leitern angegeben. Von besonderer Bedeutung für die vorliegende Abhandlung waren die Arbeiten von Lord Kelvin und Murphy.

Von den experimentellen Untersuchungen der Kugelfunkenstrecke beanspruchen für die vorliegende Arbeit nur diejenigen größere Beachtung, bei denen ein genau bekannter Scheitelfaktor die wirkliche Größe der Ueberschlagsspannung aus den Meßwerten berechnen läßt. Hand in Hand mit dem jüngst erfolgten Aufschwung der Hochspannungstechnik sind Untersuchungen mit technischem Wechselstrom und Hochspannungs-Transformatoren ausgeführt worden: erst hierdurch war die Möglichkeit gegeben, streng wissenschaftliche Versuche durchzuführen. Von den zahlreichen Arbeiten namhafter Forscher seien hier in erster Linie die klassischen Arbeiten von Toepler und Weicker und die Untersuchungen von Petersen hervorgehoben.

Bevor wir der eigentlichen Frage der Gestaltung des elektrischen Feldes zwischen zwei geladenen Kugeln unser Augenmerk zuwenden, wollen wir das Feld einer geladenen Kugel betrachten und einige wichtige Begriffsbestimmungen vorausschicken.

Teilt man einer Kugel, die sich in einem unendlich ausgedehnten Mittel von gleichmäßiger Leitfähigkeit befindet, eine positive Ladung q mit, so bildet sich in ihrer Umgebung ein elektrisches Feld aus, dessen Niveauflächen aus konzentrischen Kugelschalen bestehen. Von der Kugeloberfläche gehen geradlinige Kraftlinien aus, von denen man annehmen darf, daß sie auf einer zweiten konzentrischen Kugel mit unendlich großem Halbmesser münden, auf der die gleiche, aber entgegengesetzte Ladung $-q$ verteilt ist. Die Kapazität dieses Kugelkondensators läßt sich genau angeben, sie ist gleich dem Halbmesser der Kugel selbst. Damit die Kugel das Potential 1 erhält, muß man ihr also eine Elektrizitätsmenge q gleich dem Halbmesser R zuführen. Dieser Fall sei hier angenommen. Bringt man einen anderen Leiter von beliebigem Potential in die Nähe der geladenen Kugel, so wird das Kraftlinienbild gestört, wobei sich das Potential der Kugel ändert. Ist der eingeführte Leiter z. B. zur Erde abgeleitet, d. h. hat er das Potential 0, so wird eine Anzahl Kraftlinien, statt den weiteren Weg zu der unendlich großen Kugel zu wählen, auf eben diesem Leiter münden: denn die Kraftlinien verteilen sich gemäß dem Widerstande des vorhandenen Mittels, und das Potential der ersten Kugel sinkt. Bei unserer Ueberlegung setzen wir jedoch voraus, daß das Potential wieder durch Zuführung einer bestimmten Elektrizitätsmenge auf den Wert 1 gebracht wird. Die spezifische Dichte der von der geladenen Kugel ausgehenden Kraftlinien wird nun nicht mehr dieselbe sein, da die zu dem Leiter übergehende Anzahl die Zahl der früher vorhandenen Linien vermehrt. Setzen wir die Gesamtzahl der von unserer Kugel ausgehenden Kraftlinien proportional[1]) ihrer Ladung, so wird unser Kraftlinienbild uns einen Einblick in die Verteilung der Ladung, ihre »Dichte«, geben. Die Ladung auf 1 qcm der Kugeloberfläche ist proportional der Kraftlinienzahl, die von diesem qcm ausgeht. Da wir auf der Kugel im zweiten Falle eine gegen früher größere Menge Elektrizität haben, während sie das Potential 1 behalten hat, so ist ihre Kapazität größer als R geworden. Die rechnerische Behandlung des elektrischen Feldes ist nun nicht mehr so einfach wie früher, wo die Kugelladung durch eine Punktladung ersetzt gedacht werden konnte.

Noch schwieriger gestaltet sich die Untersuchung des Feldes, wenn die zweite Kugel nicht zur Erde abgeleitet ist, sondern auf einem von 0 verschiedenen Potential gehalten wird. Murphy und Lord Kelvin haben einen Weg gezeigt, das in diesem Fall auftretende Feld durch Ueberlagern von Feldern, wie sie durch Punktladungen hervorgerufen werden, darzustellen. Da es die Aufgabe der vorliegenden Arbeit ist, das elektrische Feld zwischen zwei gegenüberstehenden Kugeln zu untersuchen, so soll auf das obige Verfahren von Murphy und Lord Kelvin im folgenden näher eingegangen werden. Das hier eingeschlagene Verfahren stützt sich auf die Eigenschaften des elektrischen Feldes zweier sich gegenüberstehender Punktladungen von entgegengesetztem Vorzeichen.

[1]) Maxwell setzt den Kraftfluß Φ gleich der Ladung q, Abraham dagegen setzt $\Phi = 4\pi q$. Dieser letzteren Darstellung, wie sie auch Petersen bringt, wollen wir als der allgemein üblichen den Vorzug geben.

Teil I.

Das elektrische Feld zwischen zwei Kugelelektroden.

A) Rechnerische Untersuchung.

1) Genaue Ableitung der Feldgleichungen unter Zugrundelegen des Verfahrens der elektrischen Bilder.

Im Punkt P_1, Abb. 1, befindet sich eine positive Ladung $+q$, im Punkte Q_2 die negative Ladung $-q'$. Das Potential, welches in einem beliebigen Punkte P durch diese beiden Ladungen hervorgerufen wird, ist dann: $V = \frac{q}{r_1} - \frac{q'}{r_2}$, wobei r_1 gleich dem Abstand PP_1 und r_2 gleich PQ_2 ist. Eine Aequipotentialfläche des elektrischen Feldes wäre gegeben durch $V =$ konst. Stellt man die Bedingung für die Niveaufläche mit dem Potential $V = 0$ auf, so erhält man: $\frac{q}{r_1} - \frac{q'}{r_2} = 0$ oder $\frac{q}{q'} = \frac{r_1}{r_2}$. Der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstände von zwei gegebenen Punkten in einem bestimmten Verhältnis stehen, ist nach dem Satz des Apollonius eine Kugel. Die Aequipotentialfläche $V = 0$ stellt also eine Kugel dar. Sind die beiden Punktladungen gleich groß und haben sie entgegengesetztes Vorzeichen, so wird der Halbmesser dieser Kugel mit dem Potential 0 unendlich groß: die Kugel nimmt die Form der Ebene an.

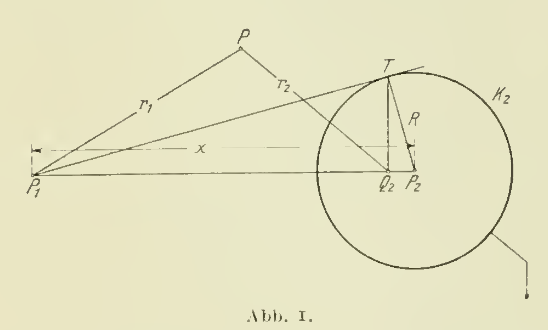


Abb. 1.

Man kann die obige Betrachtung auch in anderer Form anstellen. Man nimmt eine Punktladung gegenüber einer Kugel K_2 an und sucht diese Kugel in ihrer Wirkung durch eine Punktladung zu ersetzen. Man denke sich hierbei die Kugel K_2 zur Erde abgeleitet, d. h. sie habe das Potential $V = 0$. Man kann sich diese Kugel dann in die Lage der vorher betrachteten Niveaufläche 0 gebracht denken und sucht nun die Größe und die Lage der Ersatzpunktladung. Die Theorie[1] — von der weitschweifigen Ableitung soll hier abgesehen werden — zeigt, daß man diese zweite Punktladung in dem sogenannten Bilde von P_1 in bezug auf die Kugel K_2 annehmen muß. Dieser Punkt Q_2 liegt auf der Verbindungslinie $P_1 P_2$, so daß $P_1 P_2 \cdot P_2 Q_2 = R^2$ ist. Hierin ist R der Halbmesser der Kugel. Die Konstruktion des Bildpunktes ist sehr einfach: man legt von P_1 eine Tangente an die Kugel und fällt von der Berührungsstelle T ein Lot auf $P_1 P_2$. Die Größe der in Q_2 anzunehmenden Ladung ist — abgesehen von dem Vorzeichen — gegeben durch den Ausdruck:

[1]) Mascart et Joubert, Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme. Paris 1896, Nr. 62, 107, 114.

q' ist gleich dem von q erzeugten Potential im Mittelpunkt der Kugel mal der Kapazität der Kugel,

$$q' = \frac{qR}{P_1 P_2} = \frac{qR}{x},$$

wenn $P_1 P_2 = x$ gesetzt wird.

Die folgenden Rechnungen setzen voraus, daß die beiden Kugeln sich in einem Mittel mit der Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon = 1$ befinden. Handelt es sich um eine Kugel in einem unendlich weit ausgedehnten Isolator, so ist ihre Kapazität gleich dem Halbmesser R. Sind dagegen mehrere Leiter in einem Felde vorhanden, so versteht man unter der Kapazität eines jeden Leiters die Elektrizitätsmenge, die ihm zugeführt werden muß, damit er auf das Potential 1 geladen wird, während alle übrigen Leiter das Potential 0 haben, d. h. zur Erde abgeleitet sind. Aus dieser Bestimmung ist zu erwarten, daß die Kapazität einer Kugel bei Anwesenheit einer zweiten eine Funktion der Entfernung von dieser sein wird.

Der hier betrachtete Sonderfall nimmt 2 Kugeln vom Halbmesser R an, Abb. 2, deren Mittelpunkte um cR voneinander entfernt sind. Es soll nun untersucht werden, wie groß die Kapazität der Kugel K_1 ist, d. h. wie sie geladen werden muß, um das Potential 1 anzunehmen, während die Kugel K_2 das Potential 0 hat. Wir denken uns zunächst die Kugel K_1, ohne daß die Kugel K_2 anwesend ist, auf das Potential 1 geladen. Dazu sei die Elektrizitätsmenge q erforderlich ($q = R$). Diese denken wir uns in dem Mittelpunkte P_1 der Kugel vereinigt. Nun führen wir die Kugel K_2 ein, stellen sie K_1 gegenüber und denken sie uns zur Erde abgeleitet, also auf dem Potential $V = 0$. Dann haben wir den anfänglich betrachteten Fall: einer abgeleiteten Kugel steht eine Punktladung gegenüber. Die Lösung für die Gestaltung des Feldes wurde oben bereits gegeben. Das Feld ist so beschaffen, als ob in dem Bilde Q_2 von P_1 die Ladung $-q'$ vorhanden wäre. Die Ladung q' ist bestimmt durch die Gleichung

$$q' = \frac{q}{P_1 P_2} R = \frac{q}{x} R.$$

Diese Ladung $-q'$ in Q_2 bewirkt zusammen mit der Ladung q in P_1, daß auf K_2 das Potential 0 herrscht.

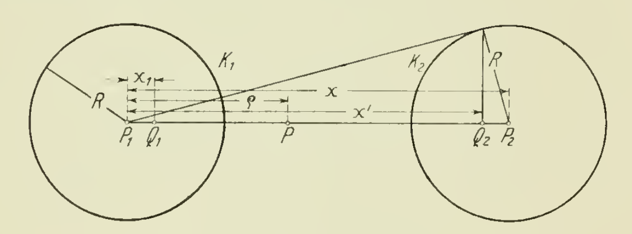


Abb. 2.

Nun denken wir uns die Kugel K_1 zur Erde abgeleitet. Jetzt ist das Feld bestimmt durch eine Ladung $-q'$ in Q_2 und eine in dem Bilde von Q_2 in bezug auf Kugel K_1 anzunehmende Punktladung $+q_1$ von der Größe

$$q_1 = \frac{q' R}{x'},$$

worin x' die Entfernung des Mittelpunktes P_1 von dem Bilde Q_2 darstellt. Dieser Bildpunkt innerhalb K_1 heiße Q_1. Die in ihm angenommene Ladung $+q_1$ erzeugt zusammen mit $-q'$ auf Kugel K_1 das Potential 0. Die Ladung $+q_1$ erzeugt

wiederum auf K_2 das Potential o, wenn in dem Bilde von Q_1 in bezug auf Kugel K_2 eine Ladung $-q''$ vorhanden gedacht wird. Genau genommen wird dieser Bildpunkt von Q_2 verschieden sein. Es ist zulässig, die vereinfachende Annahme zu machen, daß alle Bilder, wenn man sich das Verfahren immer weiter fortgesetzt denkt, mit den ersten Bildern zusammenfallen. Der hierdurch bedingte Fehler ist um so unbedeutender, je weiter die Kugeln auseinander liegen. Hiervon kann man sich leicht durch mehrfache Ausführung der Konstruktion der Bilder überzeugen. Es sei auch auf das später folgende Beispiel S. 15 verwiesen.

Auf Grund dieser Annahme würde die zuletzt betrachtete Ladung

$$q'' = \frac{q_1 R}{x'} \text{ oder } q'' = \frac{R^2}{x}\left(\frac{R}{x'}\right)^2$$

werden. Dementsprechend wird $-q''$ zusammen mit einer Ladung $+q_2$ im Punkte Q_1 auf Kugel K_1 das Potential o hervorrufen. Die Größe dieser Ladung q_2 ließe sich bestimmen zu:

$$q_2 = q'' \frac{R}{x'} \text{ oder } q_2 = \frac{R^2}{x}\left(\frac{R}{x'}\right)^3.$$

Das Endergebnis dieser Betrachtung besteht in folgendem:

In P_1 befindet sich die ursprüngliche Ladung q.

In den Bildern innerhalb der Kugel K_2 befinden sich die Ladungen $-q'$, $-q''$ usw.

In den Bildern innerhalb der Kugel K_1 befinden sich die Ladungen $+q_1$, $+q_2$ usw.

Im folgenden soll der Gang der Rechnung kurz zusammengefaßt werden. Die Ladungen wurden in folgender Reihe bestimmt:

$$q, \quad -q', \quad q_1, \quad -q'', \quad q_2, \quad -q''' \dots$$

Jede Ladung wirkt auf jede Kugel. Um die Wirkung auf K_1 allein zu untersuchen, fassen wir die Wirkung von je zwei Ladungen paarweise zusammen:

$-q'$ und q_1 erzeugen allein auf K_1 das Potential o,
$-q''$ » q_2 » » » K_1 » o usw.,
q allein erzeugt auf K_1 das Potential 1.

Zusammengenommen ergeben alle Ladungen auf K_1 das Potential 1.

Auch auf die Kugel K_2 wirken sämtliche Ladungen.

q und $-q'$ erzeugen auf K_2 das Potential o,
q_1 » $-q''$ » » K_2 » » o usw.

Zusammengenommen ergeben sämtliche Ladungen das Potential o für die Kugel K_2.

a) Kapazität des Kugelkondensators.

Betrachten wir die Gesamtwirkung aller Ladungen, so kommen wir zu dem Schluß, daß die anfängliche Ladung q auf K_1 das Potential 1 hervorruft, alle Ladungen dagegen paarweise auf K_2 und K_1 das Potential o erzeugen. Eine Ueberlagerung aller Ladungen zeigt, daß tatsächlich auf K_1 das Potential 1 herrschen muß, während K_2 das Potential o hat. Mit anderen Worten wird durch die Summe der Ladungen innerhalb von K_1 gleichzeitig die Kapazität der Kugel K_1 gegeben, wenn man auf die oben vorausgeschickte Erklärung der Kapazität zurückgreift.

Die Summe der Ladungen von K_1 sei C_a. Dann ist:

$$C_a = q + q_1 + q_2 + \ldots$$

Setzen wir die gefundenen Werte ein, so erhalten wir:

$$C_a = R + \frac{R^2}{x}\frac{R}{x'} + \frac{R^2}{x}\left(\frac{R}{x'}\right)^3 + \ldots$$

Dementsprechend finden wir die Summe der absoluten Werte der Ladungen auf K_2 zu:

$$C_{ab} = q' + q'' + q''' \ldots$$

$$C_{ab} = \frac{R^2}{x} + \frac{R^2}{x}\left(\frac{R}{x'}\right)^2 + \frac{R^2}{x}\left(\frac{R}{x'}\right)^4 + \ldots$$

In beiden Fällen haben wir geometrische Reihen mit dem Quotienten $\left(\frac{R}{x'}\right)^2$.

Da x' selbst bei sich berührenden Kugeln noch größer als R ist, ist dieser Wert stets ein echter Bruch. Die Reihe konvergiert und ihre Summe läßt sich angeben zu:

$$\text{Summe} = \frac{\text{Anfangsglied}}{1 - \text{Quotient}},$$

$$C_a = R + \frac{\frac{R^2}{x}\frac{R}{x'}}{1 - \left(\frac{R}{x'}\right)^2},$$

dementsprechend

$$C_{ab} = \frac{\frac{R^2}{x}}{1 - \left(\frac{R}{x'}\right)^2}.$$

Wir setzen $x = cR$. Wir können x_1 nach dem Kathetensatz bestimmen zu

$$x_1\, c\, R = R^2, \quad x_1 = \frac{R}{c}.$$

Wir finden ferner:

$$x' = P_1 P_2 - x_1 = \frac{c^2 R - R}{c}, \quad x' = R\frac{c^2 - 1}{c}.$$

Hiernach wird:

$$\frac{R}{x'} = \frac{R}{\frac{R\,(c^2 - 1)}{c}} = \frac{c}{c^2 - 1},$$

$$\frac{R^2}{x} \text{ erhält den Wert } \frac{R^2}{cR} = \frac{R}{c},$$

$$C_a = R + \frac{\frac{R}{c}\,\frac{c}{c^2 - 1}}{1 - \frac{c^2}{(c^2 - 1)^2}} = R + \frac{\frac{R}{c^2 - 1}}{\frac{(c^2 - 1)^2 - c^2}{(c^2 - 1)^2}}$$

$$C_a = R + \frac{R\,(c^2 - 1)}{(c^2 - 1)^2 - c^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Aus dieser Formel ersieht man, daß man die Kapazität einer Kugel trennen kann in die eigene Kapazität, die sie im unendlichen freien Raume hat, und in eine zusätzliche, hervorgerufen durch Leiter in ihrer Nähe. Als die Kugel allein im freien Raum betrachtet wurde, war ihre Kapazität gleich dem Halbmesser R. Sobald sie aber K_2 gegenübergestellt wurde, mußte eine vergrößerte Ladung angenommen werden, um auf K_1 das Potential 1 zu halten. Das Anwachsen der Kapazität auf K_1 beträgt:

$$\frac{R\,(c^2 - 1)}{(c^2 - 1)^2 - c^2}.$$

Beispiel: C_a soll für $c = 3$, d. h. für $P_1 P_2 = 3R$ bestimmt werden.

$$C_a = R + \frac{8R}{8^2 - 9} = R(1 + 8/55),$$

d. h. die Kapazität von K_1 wird rund um $1/7$ gegen die Kapazität der Kugel im unendlichen freien Raume vergrößert.

Wir finden die Ladung von K_2 zu:

$$C_{ab} = \frac{\frac{R}{c}}{1 - \frac{c^2}{(c^2-1)^2}} = \frac{R(c^2-1)^2}{c[(c^2-1)^2 - c^2]},$$

$$C_{ab} = \frac{R}{c}\,\frac{(c^2-1)^2}{(c^2-1)^2 - c^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Hat im Gleichgewichtszustand die Kugel K_1 das Potential 1, die Kugel K_2 das Potential 0, so sitzt also

innerhalb von K_1 die Elektrizitätsmenge C_a,
» » K_2 » » C_{ab}.

Das Entsprechende gilt, wenn wir K_1 und K_2 vertauscht denken. Durch Ueberlagerung ergibt sich dann: Sind die Kugeln K_1 und K_2 je auf das Potential + 1 geladen, so sitzt

auf K_1 die Ladung $C_a - C_{ab}$,
» K_2 » » $C_a - C_{ab}$.

$$C_a - C_{ab} = R + \frac{R(c^2-1)}{(c^2-1)^2 - c^2}\left[1 - \left(\frac{c^2-1}{c}\right)\right].$$

$$C_a - C_{ab} = R + \frac{R(c^2-1)}{(c^2-1)^2 - c^2}\,\frac{c - c^2 + 1}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Ist K_1 auf das Potential U geladen, K_2 auf V, so enthält

K_1 die Elektrizitätsmenge $A_E = C_a U - C_{ab} V$,
K_2 » » $B_E = C_a V - C_{ab} U$.

Für den besonderen Fall, wo $V = -U$ ist, d. h. beide Kugeln auf das gleiche, aber entgegengesetzte Potential geladen sind, gilt:

$$A_E = C_a U + C_{ab} U,$$
$$B_E = -C_a U - C_{ab} U.$$

Es ist demnach $B_E = -A_E$. Auf der einen Kugel sitzt also die gleiche Elektrizitätsmenge wie auf der anderen, nur mit dem entgegengesetzten Vorzeichen.

Auf K_1 sitzt die positive Elektrizitätsmenge $A_E = U(C_a + C_{ab})$, worin U das Potential von K_1 bedeutet.

$$C_a + C_{ab} = R + \frac{R(c^2-1)}{(c^2-1)^2 - c^2} + \frac{R}{c}\,\frac{(c^2-1)^2}{(c^2-1)^2 - c^2},$$

$$C_a + C_{ab} = R + \frac{R(c^2-1)}{(c^2-1)^2 - c^2}\left[1 + \frac{c^2-1}{c}\right],$$

$$C_a + C_{ab} = R + \frac{R(c^2-1)(c^2+c-1)}{[(c^2-1)^2 - c^2]\,c},$$

$$C_a + C_{ab} = R + \frac{R(c^2-1)}{(c^2-1-c)\,c}.$$

Beispiel: Es sei $c = 3$. Dann ist

$$C_a + C_{ab} = R + \frac{8R}{(9-1-3)\cdot 3} = R + 8/15\,R.$$

Wenn die Kugel K_1 auf das Potential 1 geladen werden soll, ohne daß die Kugel K_2 anwesend ist, so ist dazu die Elektrizitätsmenge R erforderlich.

Steht der Kugel K_1 die auf das Potential (-1) geladene Kugel K_2 gegenüber, so muß die Kugel K_1 die Ladung $C_a + C_{ab} = R + {}^7/_{15}\, R$ aufnehmen, ehe sie das Potential 1 erreicht. Die zum Potential 1 erforderliche Ladung wird also gegen den ersten Fall um rund die Hälfte vergrößert.

Die auf entgegengesetzt gleiches Potential $+U$ und $-U$ geladenen Kugeln stellen einen Kondensator dar. Der Potentialunterschied zwischen beiden Kugeln beträgt $U-(-U) = 2\,U = V_1$. Die auf der einen Kugel sitzende positive Elektrizitätsmenge war nach unserer Bezeichnung $A_E = U(C_a + C_{ab})$. Der Wert A_E entspricht dem Werte Q in der Gleichung $C = \frac{Q}{V_1}$.

Demnach ergibt sich

$$C = \frac{U(C_a + C_{ab})}{2\,U} = \frac{C_a + C_{ab}}{2}.$$

Das ist die Kapazität des Kugelkondensators in vorstehender Anordnung.

Beispiel: Es sei wiederum $c = 3$, dann wird

$$C = \frac{C_a + C_{ab}}{2} = {}^1/_2\,(R + {}^7/_{15}\,R) = 0{,}766\,R.$$

Wenn wir in $C = \frac{C_a + C_{ab}}{2}$ die Werte einsetzen, so wird

$$C = {}^1/_2\left(R + \frac{R\,(c^2-1)}{(c^2-1-c)\,c}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

oder in Farad ausgedrückt:

$$C = {}^1/_2\left[R + \frac{R\,(c^2-1)}{(c^2-1-c)\,c}\right]\frac{1}{9\cdot 10^{11}}.$$

Soll nun statt des Halbmessers R der Durchmesser D, statt der Mittelpunktentfernung $c\,R$ der Abstand der Kugeloberflächen A eingeführt werden, wie dies in den folgenden Abschnitten zum Anpassen der Formeln an die praktischen Rechnungen geschehen ist, so müssen folgende Veränderungen vorgenommen werden. Es muß gesetzt werden:

$$c\,R = A + D, \quad R = \frac{D}{2}.$$

Dann wird

$$c = \frac{A+D}{R} = \frac{2\,(A+D)}{D},$$

$$c^2 - 1 = \frac{4\,(A^2 + 2\,A\,D + D^2)}{D^2} - 1 = \frac{4\,A^2 + 8\,A\,D + 3\,D^2}{D^2},$$

$$c^2 - 1 - c = \frac{4\,A^2 + 8\,A\,D + 3\,D^2}{D^2} - \frac{2\,(A+D)}{D} = \frac{4\,A^2 + 6\,A\,D + D^2}{D^2}.$$

Setzt man diese Werte in die obige Formel für C ein, so wird

$$C = {}^1/_2\left[\frac{D}{2} + \frac{D\,(4\,A^2 + 8\,A\,D + 3\,D^2)\,D^2\,D}{2\,D^2\,(4\,A^2 + 6\,A\,D + D^2)\,2\,(A+D)}\right],$$

$$C = {}^1/_2\left[\frac{D}{2} + \frac{D^2\,(4\,A^2 + 8\,A\,D + 3\,D^2)}{4\,(A+D)\,(4\,A^2 + 6\,A\,D + D^2)}\right] \quad \ldots\ldots \quad (5),$$

$$C = {}^1/_2\left[\frac{D}{2} + \frac{D^2\,(4\,A^2 + 8\,A\,D + 3\,D^2)}{4\,(A+D)\,(4\,A^2 + 6\,A\,D + D^2)}\right]\frac{1}{9\cdot 10^{11}}\ \text{Farad}.$$

Dies ist die Kapazität eines Kondensators, der aus zwei sich gegenüberstehenden Kugeln besteht. Im Dielektrikum mit der Konstanten ε würde dieser Ausdruck ε mal so groß werden.

Die vorstehenden Ausführungen zeigen, daß bei einer gegebenen Anordnung die auf den beiden Kugeln vorhandenen Ladungen in ihrer Größe nicht allein von dem Potentialunterschied zwischen den beiden Elektroden, sondern

auch von dem absoluten Potential, d. h. dem Potential derselben gegen Erde, abhängig sind. Bei Erdung der einen Kugel hätten wir den zuerst betrachteten Fall anzunehmen, wo die Kugel K_2 das Potential 0 aufwies.

Bei einem in der Mitte der Hochspannungswicklung nicht geerdeten Transformator, wie er auch zu unseren Hochspannungsmessungen benutzt wurde, wird das absolute Potential beider Pole von der Kapazität der beiden Elektroden einschließlich der Zuleitungen und der Wicklung selbst gegen Erde abhängen. Der Nachweis, ob tatsächlich bei dem Potentialunterschied V_1 eine symmetrische Verteilung des Potentials auf beide Elektroden, d. h. $+\frac{V_1}{2}$ und $-\frac{V_1}{2}$ eintrat, konnte in unserm Falle leider nicht erbracht werden. Man war zu dieser Annahme jedoch einigermaßen berechtigt, da die Zuleitungsdrähte, die von den Hochspannungsklemmen ausgingen, tunlichst gleichmäßig bemessen waren. Immerhin ist es nicht ausgeschlossen, daß hieraus eine gewisse Ungenauigkeit der Hochspannungsmessungen entsteht.

b) Die Potentialverteilung auf der Mittellinie zwischen zwei Kugeln.

Es soll im folgenden festgestellt werden, wie das Feld aussieht, wenn die beiden Kugeln mit den gleichen Elektrizitätsmengen A_E, aber von entgegengesetztem Vorzeichen, aufgeladen werden. Nach der oben angenommenen Vereinfachung wird das Feld durch 4 Punktladungen in P_1, Q_1, Q_2 und P_2 erzeugt.

Wir nehmen zunächst wieder die Potentiale $+1$ und -1 auf den Kugeln an.

In P_1 ist die Ladung $q = R$ anzunehmen,
» Q_1 » » » $C_a - R$ vermehrt um C_{ab}, also $C_a + C_{ab} - R$ anzunehmen,
» Q_2 » » » $-C_a - C_{ab} + R$ anzunehmen,
» P_2 » » » $-R$ anzunehmen.

oder in P_1 sitzt R,
» P_2 » $-R$,
» Q_1 » $\frac{R(c^2-1)}{(c^2-1-c)c}$,
» Q_2 » $\frac{-R(c^2-1)}{(c^2-1-c)c}$.

Die Zerlegung der Ladungen beider Kugeln in vier Punktladungen, wie sie eben gezeigt wurde, erlaubt nun, die Werte des Potentials auf der Verbindungslinie beider Mittelpunkte, der kürzesten Entfernung beider Kugeln, zu berechnen. Auf dieser Verbindungslinie nehmen wir einen beliebigen Punkt P an, in dem der Wert des Potentials φ betrage. φ soll bestimmt werden aus den geometrischen Abmessungen beider Kugeln und dem zwischen ihnen herrschenden Potentialunterschied. Es wird gesetzt:

$$P P_1 = \gamma R \text{ (zur Vereinfachung des Endresultates)},$$
$$P_1 P_2 = c R,$$
$$P P_2 = c R - \gamma R = R(c-\gamma),$$
$$P Q_1 = P P_1 - P_1 Q_1 = \gamma R - \frac{R}{c} = \frac{R(c\gamma - 1)}{c},$$
$$P Q_2 = P_1 Q_2 - P P_1 = \frac{R(c^2-1)}{c} - \gamma R = R\frac{c^2-1-c\gamma}{c}.$$

Der Wert des Potentials in P setzt sich zusammen aus der Summe der Einzelwerte, nämlich aus dem Beitrag der Ladung

in P_1 $\quad \frac{R}{P P_1} = \frac{R}{R\gamma} = \frac{1}{\gamma}$,

» P_2 $\quad \frac{-R}{P P_2} = \frac{-R}{R(c-\gamma)} = \frac{-1}{c-\gamma}$,

» Q_1 $\quad \frac{R(c^2-1)}{(c^2-1-c)\,c\,P Q_1} = \frac{R(c^2-1)\,c}{(c^2-1-c)\,c\,R\,(c\gamma-1)} = \frac{c^2-1}{(c^2-1-c)(c\gamma-1)}$,

» Q_2 $\quad \frac{-R(c^2-1)}{(c^2-1-c)\,c} \, \frac{c}{R(c^2-1-c\gamma)} = -\frac{c^2-1}{(c^2-1-c)(c^2-1-c\gamma)}$.

Der Gesamtwert des Potentials in P ergibt sich zu:

$$\varphi = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{c-\gamma} + \frac{c^2-1}{(c^2-1-c)(c\gamma-1)} - \frac{c^2-1}{(c^2-1-c)(c^2-1-c\gamma)}.$$

Beispiel: Der Sonderfall $\gamma = 1$ müßte $\varphi = 1$ ergeben.

$$\varphi = 1 - \frac{1}{c-1} + \frac{c^2-1}{(c^2-1-c)(c-1)} - \frac{c^2-1}{(c^2-1-c)(c^2-1-c)}.$$

Setzen wir wiederum beispielsweise $c = 3$, so wird

$$1 - {}^1/_2 + \frac{8}{5 \cdot 2} - \frac{8}{5 \cdot 5} = 1 - \frac{25+40-16}{50} = 1 - \frac{1}{50},$$

d. h. der durch die vereinfachende Annahme, alle Bilder lägen in einem Punkte, verursachte Fehler beträgt hierbei 2 vH, dabei sind die Kugeloberflächen um ihren Halbmesser voneinander entfernt.

Es wurde für die Formel im übrigen angenommen, daß das Potential der Kugel K_1 gleich 1 gesetzt wurde. Soll der Wert des Potentials φ ermittelt werden, wenn V_1 der Potentialunterschied zwischen beiden Kugeln ist, wobei K_1 das Potential $+\frac{V_1}{2}$, K_2 dagegen $-\frac{V_1}{2}$ hat, so ist der Wert des Potentials φ im Punkte P der Verbindungslinie beider Kugelmittelpunkte:

$$\varphi = \frac{V_1}{2}\left[\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{c-\gamma} + \frac{c^2-1}{(c^2-1-c)(c\gamma-1)} - \frac{c^2-1}{(c^2-1-c)(c^2-1-c\gamma)}\right] \quad . \; . \; (6).$$

Auf der Mitte der Verbindungslinie zwischen beiden Kugeln finden wir den Wert des Potentials gleich 0, wenn beide Kugeln das gleich große, aber entgegengesetzte Potential $\frac{V_1}{2}$ haben.

c) **Die Feldstärke auf der Mittellinie zwischen zwei Kugeln.**

Es soll die Feldstärke, d. h. der Wert des negativen Potentialgefälles im Punkte P angegeben werden. Zunächst nehmen wir an, daß die Kugeln auf die Potentiale $+1$ und -1 geladen sind.

Es sei $P P_1 = \varrho = \gamma R$.

Das Potentialgefälle läßt sich in V/cm ausdrücken durch die erste Derivierte $\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}$ des Potentials nach dem Abstande.

Zur Vereinfachung der Rechnung soll im Folgenden der Ausdruck

$$\frac{c^2-1}{c^2-1-c} = a$$

gesetzt werden. Differenzieren wir den oben erhaltenen Ausdruck für den Wert des Potentials in P, so erhalten wir:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} = -\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{(c-\gamma)^2} - \frac{a c}{(c\gamma-1)^2} - \frac{a c}{(c^2-1-c\gamma)^2},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial \varrho} = \left[-\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{(c-\gamma)^2} - \frac{a c}{(c\gamma-1)^2} - \frac{a c}{(c^2-1-c\gamma)^2}\right]\frac{1}{R}.$$

Spezialisieren wir dagegen und suchen nur die Feldstärke auf der Oberfläche der Kugel, wo sie ihren Höchstwert hat und auch der Durchbruch des Mittels durch die Spannung zuerst erfolgen wird, so erhalten wir für $\gamma = 1$, d. h. die Kugeloberfläche:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\right)_{\gamma=1} = \left[-1 - \frac{1}{(c-1)^2} - \frac{ac}{(c-1)^2} - \frac{ac}{(c^2-1-c)^2}\right]\frac{1}{R},$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\right)_{\gamma=1} = -\frac{1}{R}\left[1 + \frac{1+ac}{(c-1)^2} + \frac{ac}{(c^2-1-c)^2}\right].$$

Setzen wir $a = \frac{c^2-1}{c^2-1-c}$ ein, so erhalten wir:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\right)_{\gamma=1} = -\frac{1}{R}\left[1 + \frac{1 + \frac{c(c^2-1)}{c^2-1-c}}{(c-1)^2} + \frac{c(c^2-1)}{(c^2-1-c)^3}\right].$$

Wir finden endlich:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\right)_{\gamma=1} = -\frac{1}{R}\left[1 + \frac{(c^2-1) - c + (c^2-1)c}{(c-1)^2(c^2-1-c)} + \frac{c(c^2-1)}{(c^2-1-c)^3}\right].$$

Wenn wir zwischen den beiden Kugeln einen Potentialunterschied von V_1 haben, so daß auf K_1 das Potential $+\frac{V_1}{2}$, auf K_2 das Potential $-\frac{V_1}{2}$ entfällt, so erhalten wir, da $2R = D$ ist, die Feldstärke an der Oberfläche der Kugel zu:

$$F = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\right)_{\gamma=1}$$

oder

$$F = \frac{V_1}{D}\left[1 + \frac{(c^2-1) - c + (c^2-1)c}{(c-1)^2(c^2-1-c)} + \frac{c(c^2-1)}{(c^2-1-c)^3}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Verbinden wir eine der beiden Elektroden mit der Erde, so erhalten wir für die Feldstärke, die für diesen Fall auf Grund der früher gemachten Angaben besonders abgeleitet werden müßte, einen ganz anderen Ausdruck. Die Funkenspannungen zeigen deshalb eine andere Größe als bei symmetrischer Verteilung des Potentials auf beide Elektroden. Zwei derartige Versuche lassen sich also nur unter obigem Vorbehalt mit einander vergleichen. Auch die ungleiche Verteilung des Potentials bei Kugeln kann ungenaue Werte der Luftfestigkeit ergeben, wenn diese Verteilung nicht in der Rechnung berücksichtigt wird.

Fassen wir die Ergebnisse der vorliegenden Ableitung zusammen, so finden wir, daß das Verfahren der elektrischen Bilder die Kapazität zweier sich gegenüberstehender Kugeln zu berechnen gestattet. Die Lage und Größe der Punktladungen, die in ihrer Gesamtwirkung dasselbe Feld hervorrufen wie die beiden geladenen Kugeln, kann bestimmt werden, und hierdurch läßt sich der Wert des Potentials jedes beliebigen Punktes in Bezug auf beide Kugeln berechnen. Es wird ferner eine Gleichung angegeben, welche das Potentialgefälle an der Kugeloberfläche auf die geometrische Anordnung der beiden Kugeln zurückführt. Auf die letztere Form der Feldgleichung soll im zweiten Abschnitt dieser Arbeit mehrfach zurückgegriffen werden, wenn auch für praktische Messungen die nachfolgend abgeleiteten, aber berichtigten Formeln zumeist angewendet werden sollen.

2) Die angenäherte vereinfachte Berechnung der Feldgleichungen.

Bestimmend für die vereinfachte Ableitung der Formeln dieses Abschnittes war die für den praktischen Bedarf zu umständliche Form der theoretisch genauen

Gleichungen des vorigen Teiles. Die Art der gleich zu erläuternden Zugeständnisse, die bei der folgenden Rechnung gemacht wurden, mag vom mathematischen Standpunkte aus recht anfechtbar erscheinen; allein die Ergebnisse scheinen die Wiedergabe der vereinfachten Rechnung zu rechtfertigen.

Auch bei diesem Verfahren wurde versucht, die Ladung der beiden Kugeln durch Punktladungen zu ersetzen. Es wurden die Elektrizitätsmengen $+Q$ und $-Q$ mit dem Potential $+\frac{V_1}{2}$ und $-\frac{V_1}{2}$ in den beiden Punkten X und Y vereint gedacht, Abb. 3. Bezüglich der Lage dieser Punkte wurde die Annahme gemacht, daß, wie dies bei zwei parallelen Zylindern tatsächlich der Fall wäre, der Durchmesser jeder der beiden Kugeln in Richtung der Mittellinie durch die Punkte X und Y harmonisch geteilt wird. Die Erhöhung der Kapazität bei Annäherung beider Kugeln wurde unberücksichtigt gelassen, so daß die folgenden Formeln nur für zwei weit auseinander stehende Kugeln genäherte Werte ergeben.

Die Aufgabe der folgenden Rechnung besteht darin, die Beziehung der Feldstärke an der Kugeloberfläche und der aufgedrückten Spannung sowie den geometrischen Abmessungen der Anordnung zu suchen. Die Kugeln K_1 und K_2 haben die gleichen Halbmesser R oder Durchmesser D. Die harmonischen Punkte X und Y liegen so, daß die Beziehung $BX:BY = AX:AY$ erfüllt ist.

Benennen wir:

$AB = D$ den Durchmesser,
$BC = A$ den Abstand,
$P_1P_2 = d$,
$P_1X = P_2Y = b$,
$XB = YC = \varrho_1$,
$XY = a$,
$XC = \varrho_2$,
$XP = \varrho$,

so wird $\varrho_1 = R - b$,

$$\varrho_2 = d - R - b,$$
$$\varrho_1 = \frac{D}{2} - b,$$
$$\varrho_2 = \frac{D}{2} - b + A,$$
$$a = A + 2(R - b),$$
$$a = A + D - 2b,$$
$$d = A + D.$$

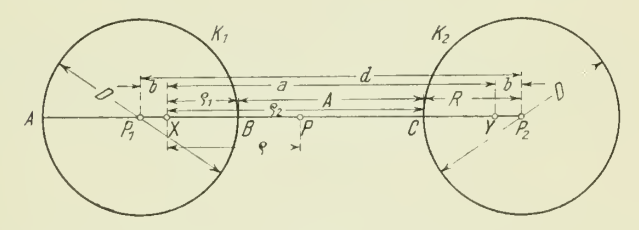


Abb. 3.

b wird gefunden aus dem harmonischen Verhältnis

$$\varrho_1 : (a - \varrho_1) = (2R - \varrho_1) : (2R + a - \varrho_1)$$

oder

$$\varrho_1^2 - 2R\varrho_1 + a(R - \varrho_1) = 0.$$

Nun ist

$$R - \varrho_1 = b,$$
$$R^2 - 2R\varrho_1 + \varrho_1^2 = b^2,$$
$$\varrho_1^2 - 2R\varrho_1 = b^2 - R^2,$$
$$b^2 - R^2 + ab = 0.$$

$a = d - 2b$ wird eingesetzt, und es ergibt sich aus dieser Gleichung:

$$b = \frac{d}{2} - \sqrt{\left(\frac{d}{2} + R\right)\left(\frac{d}{2} - R\right)}.$$

Setzt man nun $R = \frac{D}{2}$ und $d = A + D$, so erhält man:

$$b = \frac{A + D}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{A(A + 2D)},$$

$$\varrho_1 = \frac{D}{2} - b = -\frac{A}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + 2AD},$$

$$\varrho_2 = \varrho_1 + A = \frac{A}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + 2AD},$$

$$a = A + D - 2b = \sqrt{A^2 + 2AD}.$$

Bestimmt man das Potential für den Punkt P, so erhält man:

$$\varphi = \frac{Q}{\varrho} - \frac{Q}{(a - \varrho)}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = -\left(\frac{Q}{\varrho^2} + \frac{Q}{(a - \varrho)^2}\right).$$

Mit Rücksicht darauf, daß die vorliegende Ableitung einen Wert der Feldstärke ergibt, der noch einer Berichtigung bedarf, bezeichnen wir die Feldstärke hier mit F' und finden, da

$$F' = -\frac{d\varphi}{d\varrho},$$

den Wert derselben zu:

$$F' = \frac{Q}{\varrho^2} + \frac{Q}{(a - \varrho)^2} = Q\left[\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{(a - \varrho)^2}\right].$$

Die Feldstärke ist identisch mit dem negativen Potentialgefälle in diesem Punkte P. Würden wir $\frac{d\varphi}{d\varrho}$ integrieren über die ganze Strecke zwischen den beiden Kugeln, also von $\varrho = \varrho_1$ bis $\varrho = \varrho_2$, so müssten wir die Spannung erhalten, die dem Potentialunterschied zwischen den beiden Kugeln entspricht.

Da wir ferner die vereinfachende Annahme gemacht hatten, daß die Kapazität der Kugel, welche auf das Potential $+\frac{V_1}{2}$ durch die Elektrizitätsmenge $+Q$ geladen war, dieselbe sei wie die einer Kugel im freien Raume, nämlich $C = \frac{D}{2}$, so erhalten wir:

$$Q = C\frac{V_1}{2} = D\frac{V_1}{4}.$$

Setzen wir diesen Wert von Q in die obige Gleichung der Feldstärke ein, so finden wir

$$F' = \frac{D V_1}{4}\left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{(a - \varrho)^2}\right).$$

a) Die Feldstärke an der Kugeloberfläche.

Wir wollten die Feldstärke an der Oberfläche einer der beiden Kugeln berechnen. Wir wählen die positive Kugel — für die negative müßten wir, da die Anordnung symmetrisch ist, den gleichen Wert von F' erhalten — und setzen demnach:

$$\varrho = \varrho_1 = -\frac{A}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + 2AD}.$$

Es wird:

$$F_{\varrho_1}' = \frac{D V_1}{4}\left(\frac{1}{\left(-\frac{A}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + 2AD}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{A}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + 2AD}\right)^2}\right)$$

oder

$$F_{\varrho_1}' = \frac{D V_1}{4}\left(\frac{\frac{A^2 + 2AD}{2} + \frac{A^2}{2}}{\left(\frac{A^2 + 2AD}{4} - \frac{A^2}{4}\right)^2}\right) = \frac{D V_1}{4} \cdot \frac{A^2 + AD}{A^2 D^2}.$$

Wir finden endlich die gesuchte Gleichung zu:

$$F_{\varrho_1}' = V_1 \frac{A + D}{A D}$$

oder

$$V_1 = F_{\varrho_1}' \frac{A D}{A + D} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Die vorliegende Formel ist ersichtlich einfacher gebildet als die im vorigen Abschnitt abgeleitete; sie wird aber für die genaue Berechnung von Feldstärken noch unbrauchbar sein, da die Annahmen, von denen sie ausgeht, nur für den beschränkten Fall $A = \infty$ zutreffen. Stellen wir dagegen einen Vergleich an zwischen den Werten der genauen Formel des vorigen Abschnittes und den zuletzt ermittelten, so finden wir, daß man sie durch Einführung eines einfachen Faktors, der nur von dem Verhältnis $\frac{A}{D}$ abhängt, berichtigen kann. Dieser Faktor k ist in Zahlentafel 2 bezw. Abb. 8 in Funktion von $\frac{A}{D}$ aufgetragen, soll aber noch später näher besprochen werden.

b) Die Potentialverteilung auf der Mittellinie zwischen zwei Kugeln.

Auch die Verteilung des Potentials im Dielektrikum auf der kürzesten Entfernung beider Kugeln wurde ermittelt, doch sind die Werte dieser Formeln nur bei größeren Werten des Verhältnisses $\frac{A}{D}$ annähernd richtig. Auf die ausführliche Ableitung soll hier verzichtet werden. Der Gang der Berechnung ist aus den folgenden Formeln erkenntlich. Es wurde der Wert des Potentials in einem Punkte P betrachtet, der von B um $BP = l_1$ entfernt ist. Die Spannung zwischen B und P wird mit S bezeichnet.

$$\int\limits_{\varrho = R - b}^{\varrho = R - b + l_1} \frac{dV_1}{d\varrho}\, d\varrho = S = \int\limits_{\varrho = R - b}^{\varrho = R - b + l_1} d\varrho \left[-Q \left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{(a - \varrho)^2} \right) \right] 9 \cdot 10^{11},$$

$$S = Q\, 9 \cdot 10^{11} \left[-\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{a - \varrho} \right]_{\varrho = R - b}^{\varrho = R - b + l_1},$$

$$S = Q\, 9 \cdot 10^{11} \left[-\frac{1}{R - b + l_1} + \frac{1}{a - R + b - l_1} + \frac{1}{R - b} - \frac{1}{a - R + b} \right].$$

Setzt man die Werte von R, b und a ein, so ergibt sich

$$S = Q\, 9 \cdot 10^{11}\, l_1 \frac{A D + A^2 - l_1 A}{\frac{A D}{2} \left(\frac{A D}{2} + l_1 A - l_1^2 \right)}.$$

Setzt man $Q = \frac{V_1 D}{4 \cdot 9 \cdot 10^{11}}$, wobei die Kapazität einer Kugel wieder $C = \frac{D}{2}$ gesetzt ist, so findet man schließlich den Potentialunterschied zwischen den Punkten B und P ausgedrückt durch den zwischen den beiden Kugeln herrschenden Potentialunterschied V_1 zu:

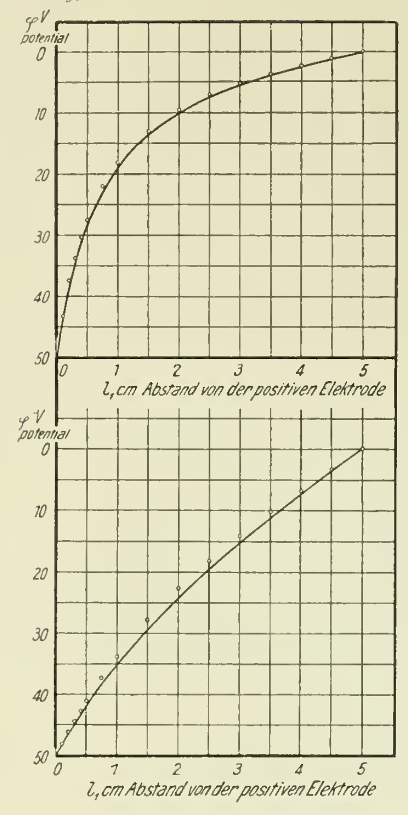
$$S = V_1\, l_1 \frac{D + A - l_1}{A D + 2\, l_1 A - 2\, l_1^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

S ist gleich dem Potentialunterschied zwischen der Kugel mit dem Potential $\frac{V_1}{2}$ und dem absoluten Potential φ des betrachteten Punktes. Es wird demnach

$$S = \frac{V_1}{2} - \varphi.$$

Um einen Vergleich mit der genauen Formel zu ermöglichen, wurden die Werte dieser Formeln in Kurvenform für den Abstand $A = 10$ cm und die

Durchmesser 1,5 und 10 cm aufgetragen. Die neben den theoretischen Kurven sichtbaren Punkte sind nach der vereinfachten Formel berechnet (Abb. 4 und Abb. 5).



Die ausgezogenen Kurven sind nach der Bildformel berechnet.

o Punkte der Formel:

$$S = V_1 l_1 \frac{D + A - l_1}{A D + 2 l_1 A - 2 l_1^2}$$

$$\varphi = \frac{V_1}{2} - S$$

$D = 1{,}5$ cm Dmr.
$A = 10$ » Elektrodenabstand
$l = 0$ » Zuleitungslänge

$D = 10$ cm Dmr.
$A = 10$ » Elektrodenabstand
$l = 0$ » Zuleitungslänge

Abb. 4 und 5. Vergleich der Ergebnisse der beiden Formeln für die Potentialverteilung.

c) Die Feldstärke auf der Mittellinie zwischen zwei Kugeln.

Ganz ähnlich ergibt sich der Wert der Feldstärke für den Punkt P unter der gleichen Voraussetzung eines großen Wertes für das Verhältnis $\frac{A}{D}$.

$$\left(\frac{d\varphi}{d\varrho}\right)_{\varrho = R - b + l_1 \text{ für Punkt } P} = -\frac{D V_1}{4}\left(\frac{1}{(R - b + l_1)^2} + \frac{1}{(a - R + b - l_1)^2}\right).$$

Setzen wir

$$R - b = -\frac{A}{2} + {}^1/_2 \sqrt{A^2 + 2AD} = C_1\,,$$

$$a - R + b = \frac{A}{2} + {}^1/_2 \sqrt{A^2 + 2AD} = C_2\,,$$

so wird

$$C_1 + C_2 = a, \qquad C_2 - C_1 = A.$$

Als Endergebnis erhalten wir die Feldstärke im Punkte P, ausgedrückt in V/cm, wenn wir die Spannung V_1 in Volt einsetzen:

$$-\left(\frac{d\varphi}{d\varrho}\right)_{\text{für } P} = F_P' = \frac{D V_1}{4}\left(\frac{1}{(C_1 + l_1)^2} + \frac{1}{(C_2 - l_1)^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Für $l_1 = 0$ muß dieser Ausdruck die Feldstärke im Punkte B an der Oberfläche der einen Kugel ergeben. Tatsächlich finden wir, wie früher:

$$F'_{l_1 = 0} = V_1 \frac{A + D}{A D}.$$

3) Vergleich der beiden Formeln für die Feldstärke und Aufstellung eines Berichtigungsfaktors für die einfache Formel.

Wir setzen das aus den letzten Ableitungen erhaltene $F' = kF$. F ist die in den Ableitungen des ersten Abschnittes ermittelte Feldstärke. Um den Berichtigungsfaktor k für die Formel

$$V_1 = kF \frac{A\,D}{A + D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

zu bestimmen, wurden die Werte der Feldstärke für die beiden Gleichungen

$$F = \frac{V_1}{D}\left[1 + \frac{(c^2 - 1) - c + (c^2 - 1)\,c}{(c - 1)^2\,(c^2 - 1 - c)} + \frac{c\,(c^2 - 1)}{(c^2 - 1 - c)^3}\right],$$

$$kF = F' = V_1 \frac{A + D}{A\,D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

für verschiedene Abstände A und Durchmesser D aufgetragen, wobei stets ein Potentialunterschied von $V_1 = 100$ V vorausgesetzt wurde. Die aus der ersteren Formel berechneten Werte der Feldstärke sind in die Zahlentafel 1 eingetragen.

Zahlentafel 1.

Berechnung der Feldstärken für verschiedene Durchmesser und Abstände nach der Formel (7) der elektrischen Bilder für einen Potentialunterschied von $V_1 = 100$ V.

$D = 15$ cm Dmr.		$D = 10$ cm Dmr.		$D = 5$ cm Dmr.		$D = 3{,}5$ cm Dmr.	
A cm	F V/cm	A cm	F V/cm	A cm	F V/cm	A cm	F V/cm
3,75	28	2,5	42	1,250	84	0,875	120,0
6,0	20,41	—	—	—	—	—	—
7,5	17,62	5,0	26,42	2,5	52,85	1,75	75,5
11,25	13,72	7,5	20,58	3,75	41,15	2,625	58,75
15,0	11,75	10,0	17,62	5,0	35,22	3,5	50,35
18,75	10,59	—	—	—	—	—	—
22,5	9,82	15,0	14,74	7,5	29,48	5,25	42,1
30	8,925	20,0	13,39	10,0	26,78	7,0	38,25
37,5	8,4	25,0	12,6	12,5	25,2	8,75	36,0
45	8,065	30,0	12,1	15,0	24,2	10,5	34,58
52,5	7,84	35,0	11,76	17,5	23,52	12,25	33,6
60,0	7,67	40,0	11,51	20,0	23,02	14,0	32,9
75	7,46	50	11,18	25,0	22,37	17,5	31,94
112,5	7,17	75	10,75	37,5	21,5	26,25	30,72
150	7,035	100	10,55	50,0	21,1	35,0	30,13
187,5	6,96	125	10,43	62,5	20,86	43,75	29,8
225,0	6,9	150	10,35	75,0	20,7	52,5	29,58
247,5	6,88	165	10,32	82,5	20,63	57,75	29,49
285	6,86	190	10,28	95,0	20,58	66,5	29,38
360	6,82	240	10,22	120,0	20,43	84,0	29,2
435	6,79	290	10,18	145,0	20,37	101,5	29,1
585	6,76	390	10,13	195,0	20,27	136,5	28,93
735	6,735	490	10,10	245,0	20,2	171,5	28,85
1110	6,715	740	10,07	370,0	20,13	259,0	28,78
1485	6,70	990	10,05	495,0	20,1	346,5	28,70
1860	6,695	1240	10,04	620,0	20,08	434,0	28,69
2235	6,685	1490	10,03	745,0	20,07	521,5	28,68
2610	6,685	1740	10,03	870,0	20,07	609	28,68
∞	6,666	∞	10,0	∞	20	∞	28,58

Zahlentafel 1 (Fortsetzung).

D = 2,15 cm Dmr.		D = 1,5 cm Dmr.		D = 1,0 cm Dmr.		D = 0,45 cm Dmr.	
A cm	F V/cm	A cm	F V/cm	A cm	F V/cm	A cm	F V/cm
0,5375	195,4	0,375	280	0,25	420	0,1125	933
1,075	123,0	0,75	176,2	0,5	264,2	0,225	587,5
1,6125	95,7	1,125	137,2	0,75	205,8	0,3375	457
2,15	82,0	1,50	117,5	1,0	176,2	0,45	391,6
3,225	68,55	2,25	98,2	1,5	147,4	0,675	327,2
4,3	62,3	3,0	89,25	2,0	133,9	0,9	297,5
5,375	58,6	3,75	84,0	2,5	126,0	1,125	280
6,45	56,3	4,5	80,65	3,0	121,0	1,35	269
7,525	54,7	5,25	78,4	3,5	117,6	1,575	261,3
8,6	53,55	6,0	76,7	4,0	115,1	1,8	255,8
10,75	52,0	7,5	74,6	5,0	111,8	2,25	248,4
16,125	50,0	11,25	71,7	7,5	107,5	3,375	238,9
21,5	49,1	15,0	70,35	10,0	105,5	4,5	234,5
26,875	48,52	18,75	69,6	12,5	104,3	5,625	231,8
32,25	48,14	22,5	69,0	15,0	103,5	6,75	230,0
35,475	48,0	24,75	68,8	16,5	103,2	7,425	229,4
40,85	47,8	28,5	68,6	19,0	102,8	8,55	228,4
51,6	47,55	36,0	68,2	24,0	102,2	10,8	227,1
62,35	47,38	43,5	67,9	29,0	101,8	13,05	226,2
83,85	47,12	58,5	67,6	39,0	101,3	17,55	225,1
105,3	47,0	73,5	67,35	49,0	101,0	22,05	224,4
159,1	46,82	110,0	67,15	74,0	100,7	33,3	223,8
212,9	46,75	148,5	67,0	99,0	100,5	44,55	223,2
266,6	46,7	186,0	66,95	124,0	100,4	55,8	223,0
320,3	46,68	223,5	66,85	149,0	100,3	67,05	222,9
374,0	46,68	261,0	66,85	174,0	100,3	78,3	222,9
∞	46,52	∞	66,66	∞	100	∞	222,2

Es wurde ferner für beide Formeln die Feldstärke in Funktion vom Abstande A in Kurvenform aufgetragen, und zwar für verschiedene Durchmesser, entsprechend den bei den Versuchen benutzten Kugelpaaren.

Diese Durchmesser sind:

D = 15, 10, 5,0, 3,5, 2,15, 1,5, 1,0, 0,45 cm.

Man ersieht aus den Schaulinien der Kurventafeln Abb. 6 und Abb. 7, daß die beiden Kurven für einen bestimmten Durchmesser einen ähnlichen Verlauf zeigen, und daß die Kurve $F' = V_1 \frac{A+D}{A\,D}$ höhere Werte der Feldstärke ergibt als die genaue Formel (7).

Bilden wir nun für die verschiedenen Durchmesser die zusammengehörigen Werte von F bezw. F' und $\frac{A}{D}$ für beide Formeln (dies ist für einige Durchmesser in Zahlentafel 2 durchgeführt), und bilden wir aus $\frac{kF}{F}$ den Wert k, so zeigt sich, daß $k = f\left(\frac{A}{D}\right)$ für alle Durchmesser die gleiche Berichtigungskurve ergibt. Diese Kurve ist in Schaulinie Abb. 8 wiedergegeben und kann zur Berichtigung der im Abschnitt 2 ermittelten einfachen Formel dienen, die wir demnach $V_1 = kF \frac{A\,D}{A+D}$ schreiben wollen.

Abb. 6.

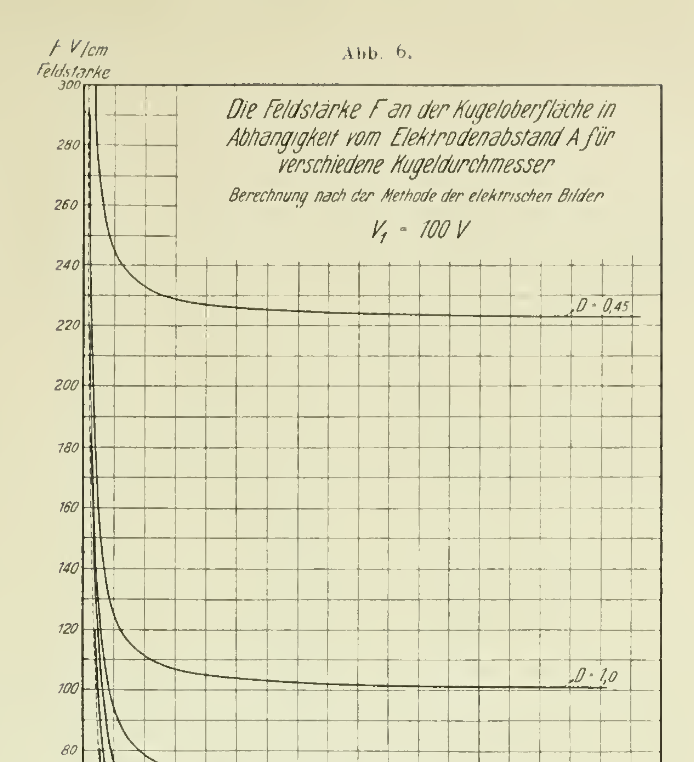
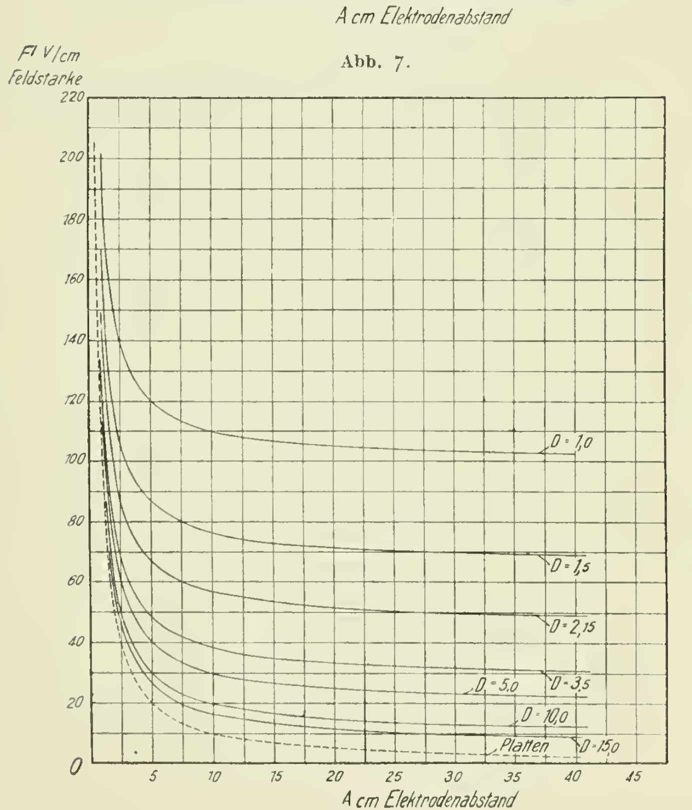


Abb. 7.



Die Feldstärke F' in Funktion vom Abstande A für verschiedene Kugeldurchmesser.

Berechnung nach der Formel: $F' = k\,F = V_1 \dfrac{A + D}{A\,D}$

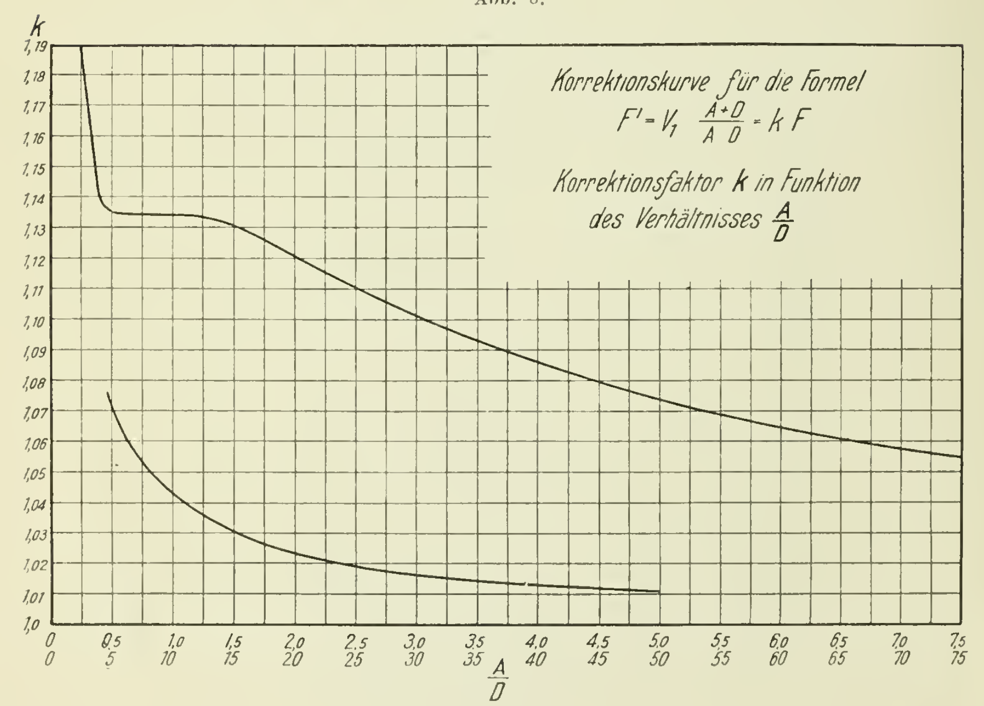
$V_1 = 100\,V$

Zahlentafel 2.

Berichtigungsfaktor k für die Formel (12) $F' = V_1 \frac{A + D}{A D} = kF$ in Abhängigkeit vom Verhältnis Abstand : Durchmesser.

$\frac{A}{D}$	$D = 15$ cm	$D = 3{,}5$ cm	$D = 0{,}45$ cm
0,25	1,191	1,190	1,192
0,4	1,143	1,143	1,143
0,5	1,135	1,135	1,135
0,75	1,135	1,134	1,135
1,0	1,135	1,134	1,135
1,25	1,133	1,133	1,133
1,5	1,131	1,131	1,131
2,0	1,121	1,121	1,121
2,5	1,111	1,109	1,111
3,0	1,102	1,102	1,102
3,5	1,093	1,093	1,093
4,0	1,086	1,086	1,086
5,0	1,073	1,074	1,073
7,5	1,055	1,055	1,055
10,0	1,043	1,043	1,043
12,5	1,036	1,036	1,036
15,0	1,031	1,031	1,031
16,5	1,028	1,028	1,028
19,0	1,024	1,025	1,024
24,0	1,020	1,020	1,020
29,0	1,016	1,016	1,016
49,0	1,010	1,011	1,011
74,0	1,007	1,007	1,008
99,0	1,006	1,006	1,006
124,0	1,004	1,004	1,004
149,0	1,003	1,003	1,003
174,0	1,002	1,002	1,002

Abb. 8.



Beispiel: Wollen wir für eine Funkenspannung $V_1 = 68{,}05$ KV, einen Abstand $A = 5$ cm bei einem Durchmesser $D = 3{,}5$ cm die an den Kugeloberflächen in Richtung der Mittellinie herrschende Feldstärke F ermitteln, so verfahren wir wie folgt:

Wir bestimmen für $\frac{A}{D} = \frac{5}{3{,}5} = 1{,}43$ den Wert $k = 1{,}132$ und erhalten

$$F = \frac{V_1}{k} \frac{A+D}{AD} = \frac{68{,}05}{1{,}132} \frac{8{,}5}{5 \cdot 3{,}5} = 29{,}3 \text{ kV/cm.}$$

Man hätte den gleichen Wert aus der Kurventafel der genauen Formel erhalten können, da diese den Durchmesser 3,5 cm anführt, doch war hierbei die vorausgesetzte Spannung 100 V statt 68,05 kV. Der abgelesene Wert für $D = 3{,}5$ cm und $A = 5{,}0$ cm beträgt:

$$F_{100} = 43{,}2 \text{ V/cm.}$$

Demnach wird die Feldstärke an der Kugeloberfläche:

$$F = \frac{43{,}1 \cdot 68050}{100} = 29{,}3 \text{ KV/cm.}$$

In das Schaubild Abb. 6 und Abb. 7, ($F = f(A)$ für verschiedene Durchmesser D und für $V_1 = 100$) ist noch die Kurve für Kugeln mit dem Durchmesser $D = \infty$, d. h. für ebene Platten unendlicher Ausdehnung eingetragen. Hierfür wurden die Werte ohne weiteres aus Spannung und Abstand berechnet, da man eine lineare Verteilung der Spannung zwischen den Platten annehmen muß. So wurde z. B. für den Abstand $A = 5$ cm eine Feldstärke $F = \frac{100 \text{ V}}{5 \text{ cm}} = 20$ V/cm ermittelt. Diese gestrichelt gezeichete Kurve stellt also die untere Grenze dar, welche die Feldstärke für eine gegebene Anordnung unter Voraussetzung von $V_1 = 100$ V überhaupt erreichen kann. Mit wachsendem Abstande streben alle Feldstärken für jeden Kugeldurchmesser dieser Kurventafel je einem konstanten Werte zu, der gleich $\frac{V_1}{D}$ ist. $\frac{V_1}{D}$ ist identisch mit der Elektrizitätsmenge, die auf der positiv geladenen Kugel sitzt, und diese hatten wir früher mit der Kraftliniendichte in enge Beziehung gebracht.

Wir denken uns hierbei die Kugel, da sie unendlich weit von der anderen entfernt ist, durch eine Punktladung ersetzt, deren Größe $Q = C \frac{V_1}{2}$ ist, d. h. $= \frac{D}{2} \frac{V_1}{2}$. Die Kapazität der Kugel können wir, ohne einen Fehler zu begehen, zu $\frac{D}{2}$ annehmen. Dann ist in einem beliebigen Punkte des elektrischen Feldes im Abstande ϱ auf der Mittellinie das hervorgerufene Potential

$$\varphi = \frac{Q}{\varrho} - \frac{Q}{A - \varrho}.$$

Da $A = \infty$ angenommen, wird für kleine Werte von ϱ der Ausdruck $\varphi = \frac{Q}{\varrho}$. Dementsprechend wird $\frac{d\varphi}{d\varrho} = -\frac{Q}{\varrho^2}$.

Wollen wir die Feldstärke auf der Kugeloberfläche bestimmen, so müssen wir $\varrho = \frac{D}{2}$ setzen. Dann finden wir:

$$-\frac{d\varphi}{d\varrho} = F = \frac{Q}{\frac{D^2}{4}} = \frac{\frac{D V_1}{4}}{\frac{D^2}{4}} = \frac{V_1}{D},$$

den oben erhaltenen Wert der Feldstärke für große Werte des Verhältnises $\frac{A}{D}$.

Man erkennt hierbei wieder den engen Zusammenhang, der zwischen der Berechnung der Kapazität und der Feldstärke besteht. Ebenso wichtig ist die Vorstellung, daß der Hauptteil des dielektrischen Widerstandes zwischen zwei weit entfernten Kugeln im wesentlichen auf die nächste Umgebung der Kugeln entfällt. Kapazität und Widerstand stehen zu einander im reziproken Verhältnis, so daß aus Widerstandsmessungen zwischen zwei Leitern auf ihre Kapazität zurückgeschlossen werden kann. Von dieser Erkenntnis werden wir noch später Gebrauch machen.

B) Experimentelle Untersuchung.

Erläuterung des Meßverfahrens.

Eine experimentelle Aufnahme der Potentialverteilung im elektrischen Felde ist mit großen Schwierigkeiten verbunden, da die Einführung einer Sonde sich nicht bewerkstelligen läßt, ohne das Feld empfindlich zu stören. Der dielektrische Verschiebungsfluß durchsetzt jeden Isolator, ja den Isolator sogar ε mal besser als die atmosphärische Luft. Ein Mittel, durch das sich die elektrischen Kraftlinien ungestört abblenden lassen, kennen wir nicht. Der Verfasser wandte daher ein anderes Verfahren an, welches das »Abblenden« erlaubt, nämlich die Messung der Potentialverteilung im Elektrolyten. Bringen wir unsere Kugeln in eine stromleitende Flüssigkeit und verbinden sie mit den Polen einer Stromquelle, so muß das Bild der auftretenden Aequipotentialflächen genau dasselbe Aussehen zeigen, wie vorher im Dielektrikum. Zum Unterschied von dem Zwangszustand, den unsere geladenen Kugeln im Dielektrikum hervorriefen, fließt jetzt ein Strom von der einen zur anderen Elektrode. Die Bedingungen für die Verteilung dieses Stromes in der Flüssigkeit sind die gleichen geblieben, wie wir sie für den Verschiebungsfluß im Dielektrikum gefunden hatten: Jede der gedachten Kraftröhren zwischen den beiden Kugeln muß den gleichen Widerstand aufweisen. Ganz gleiche Verhältnisse finden wir bei zwei magnetischen Massen, die sich gegenüberstehen, sodaß unser Kraftlinienbild im Dielektrikum und Elektrolyten einem mit Eisenfeilspänen erhaltenen Bilde ähnlich sehen müßte. Von der Dichte der Kraftlinien wollen wir hierbei absehen.

Die Isolation der Zuleitungen zu der Sonde, mit der wir die Potentialverteilung aufnehmen wollen, macht jetzt keinerlei Schwierigkeiten mehr. Der Anwendungsbereich unseres Elektrolytmeßverfahrens erleidet jedoch eine Einschränkung: Wir sind an die endliche Größe der Behälter gebunden, in denen wir die Messung vornehmen. Es wird daher unsere erste Aufgabe sein, die Größe der Fehler, die durch die endliche Behältergröße entstehen, durch den Versuch festzustellen [1]).

Die im folgenden wiedergegebenen Elektrolytmessungen wurden im Elektrotechnischen Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule zu Berlin ausgeführt.

Das vorliegend kurz gekennzeichnete Meßverfahren soll zur Nachprüfung unserer theoretischen Ueberlegungen und Formeln, besonders aber zur Bestim-

[1]) Während der Verfasser die Messungen der Potentialverteilung zwischen Kugelelektroden nach dem oben angeführten Verfahren fast beendet hatte, erschien in den Proceedings of the A. I. of E. E. Heft März 1913 von C. L. Fortescue und S. W. Farnsworth ein bemerkenswerter Aufsatz, in dem ein ähnliches Verfahren zur Messung der Aequipotentialflächen um einen Leiter beschrieben wurde. Die beiden Forscher benützten im Gegensatz zum Verfasser Gleichstrom und tasteten die Aequipotentialflächen in der Weise ab, daß sie die Sonde bewegten und dabei den Ausschlag eines Galvanometers auf null hielten.

mung der störenden Einflüsse der Zuleitungen zu den Elektroden Verwendung finden. Es wurden nun zwischen den Kugeln und der Sonde keine Spannungen, sondern nur das Verhältnis der Spannungen zwischen der Sonde und den beiden Kugeln bestimmt. Im Gegensatz zu den Messungen bei Hochspannung können bei den Messungen im Wasserbade beliebige Teile der Anordnung isoliert werden, sodaß z. B. auch Kugeln ohne Zuleitungen untersucht werden können. Hierdurch ist die Möglichkeit einer Prüfung unserer Formeln gegeben. Für die Messungen wurde der Wechselstrom eines kleinen Induktionsapparates mit Hammerunterbrecher benutzt, um Polarisationsstörungen, wie sie bei Gleichstrom auftreten, auszuschließen. Bei Benutzung von Wechselstrom gehen zwar Kondensatorströme durch die dick bemessenen isolierendenHüllen, aber diese Ströme sind äußerst geringfügig und beeinflussen die Güte der Messungen höchstens innerhalb ihrer Fehlergrenzen, wie genaue Prüfungsversuche zeigten.

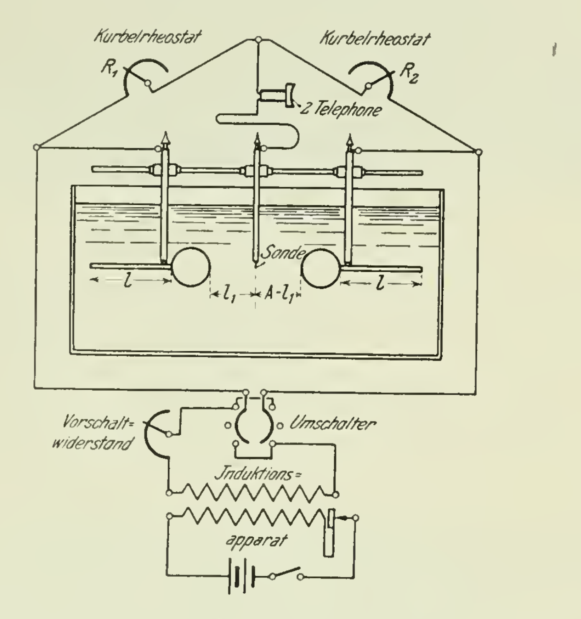


Abb. 9. Schaltschema für die Aufnahme der Potentialverteilung mit der Sonde.

Für die praktische Ausführung der Messung wurde die Telephonmethode mit zwei Telephonen in Schaltung der gewöhnlichen Wheatstonebrücke gewählt. Das Schaltschema zeigt Abb. 9. Ist nach dem Einregeln der Widerstände der Ton im Telephon verschwunden, so führt die Sonde keinen Strom mehr und kann dann das vorhandene Feld nicht mehr wesentlich stören. Eine sehr geringe Störung findet immer statt, denn die isolierte Sonde schneidet einen nicht leitenden Raum von der Größe ihres Volumens aus dem Elektrolyten heraus. Die in der Abbildung angegebene Wanne ist ein Steinzeugtrog von den Abmessungen 130 cm × 90 cm bei einer Höhe von 70 cm und einem Inhalt von rd. 800 l (Abb. 10).

Die Sonde besteht aus einem durch Gummischlauch gut isolierten Messingdraht, der an seinem unteren Ende ein dünnes, blankes Drahtstückchen von 1 mm Länge und 1/2 mm Durchmesser als eigentlichen Sondenkörper trägt. Noch kleinere Sondenkörper beeinträchtigen die Empfindlichkeit der Messung, da sie wie vor die Telephone geschaltete Widerstände wirken, während wiederum größere Körper das Bild des Feldes stören. Letzterer Umstand fällt um so

mehr ins Gewicht, je kleiner die das Feld erzeugenden Elektroden sind und in je größerer Nähe derselben das Potential bestimmt werden soll.

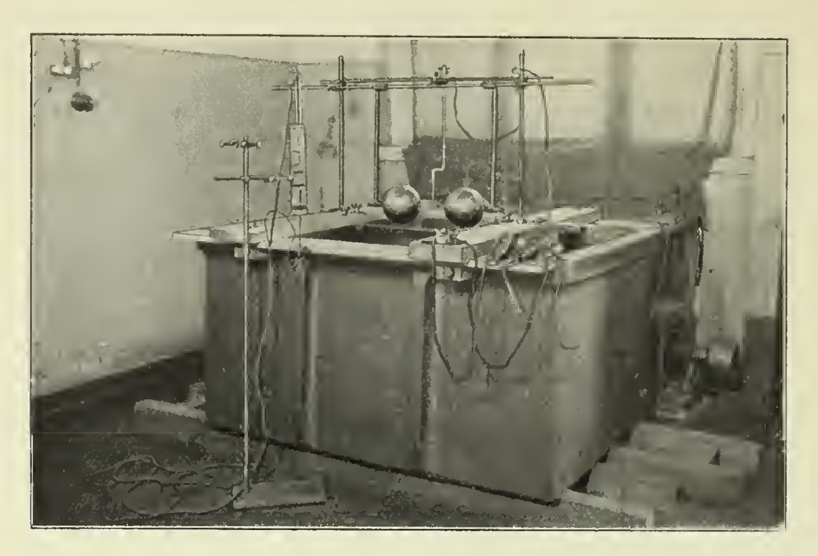


Abb. 10. Sondenmessung der Potentialverteilung zwischen Kugeln in der großen Wanne von 800 l Inhalt. Die Kugelelektroden und die Sonde sind aus dem Wasserbade herausgehoben. Links vor der Wanne der Vergleichswiderstand und Kondensator.

l) Prüfung der unter A 1b) berechneten Potentialverteilung.

Die Messungen wurden, um den Einfluß der endlichen Wannengröße durch Versuch zu ermitteln, an einer kleineren Wanne von den Abmessungen 50 cm × 35 cm bei einer Höhe von 35 cm und einem Inhalt von rd. 55 l wiederholt, Abb. 11.

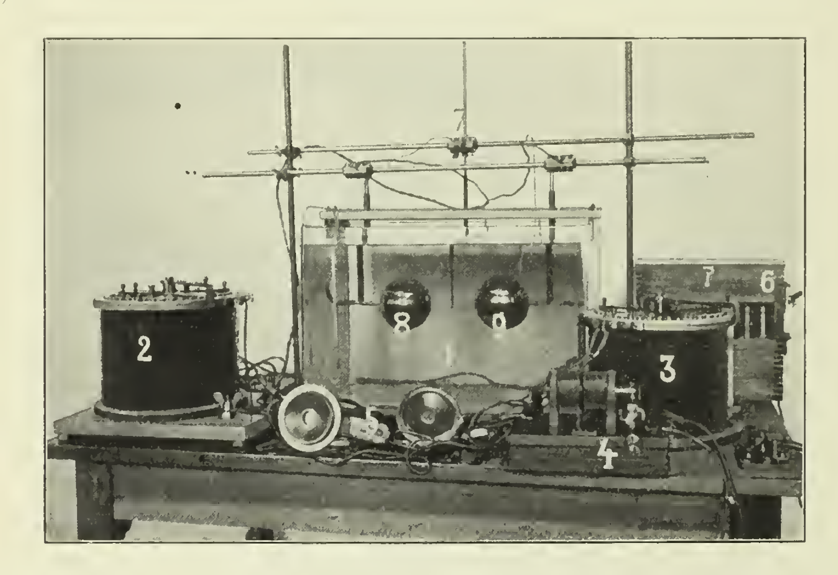
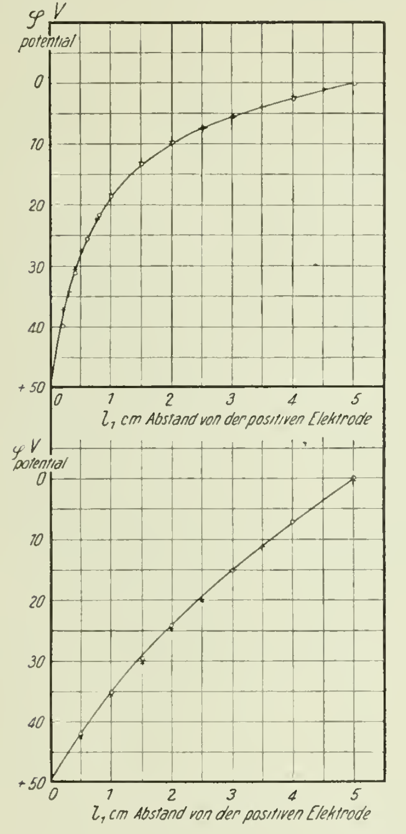


Abb. 11.
Sondenmessung der Potentialverteilung zwischen Kugeln in der kleinen Wanne von 55 l Inhalt.

1 Wanne	4 Induktorium	7 Sonde
2 Rheostat R_1	5 Telephone	8, 9 Kugelelektroden
3 Rheostat R_2	6 Batterie	

Als Elektrolyt wurde beide Male reines Leitungswasser benutzt. Die Leitfähigkeit des Elektrolyten fällt bei diesen Messungen heraus, daher spielt weder die Konzentration des Elektrolyten, noch die Temperatur eine Rolle. Bei jeder Versuchsreihe wurde das Wasser mit einem Rührapparat gründlich durchquirlt, um an jeder Stelle die gleiche Temperatur zu erhalten.

Die Ergebnisse von zwei Messungen der Potentialverteilung zwischen zwei Kugelpaaren verschiedener Größe, aber bei gleichem Abstande und isolierten Zuleitungen, sind in Abb. 12 und Abb. 13 wiedergegeben. Eine nennenswerte Abweichung besteht nicht, sodaß die ausgeführten Messungen in der größeren Wanne wohl einen hinreichenden Teil des Raumes, der für die Leitung in Frage kommt, berücksichtigen. Streng genommen müßte die Wasserwanne natürlich sehr groß sein, doch würden die Messungen in noch größeren Behältern technische Schwierigkeiten mit sich bringen.



Theoretische Kurve nach der Bildformel mit den Meßpunkten:

○ = große Wanne
+ = kleine Wanne
D = 1,5 cm Dmr.
A = 10 » Elektrodenabstand
l = 0 » Zuleitungslänge

Theoretische Kurve nach der Bildformel mit den Meßpunkten:

○ = große Wanne
+ = kleine Wanne
D = 10 cm Dmr.
A = 10 » Elektrodenabstand
l = 0 » Zuleitungslänge

Abb. 12 und 13. Einfluß der endlichen Größe der Wanne. Potentialverteilung zwischen Kugelelektroden.

Bei den Versuchen wurde die Sonde auf der Verbindungslinie beider Kugelmittelpunkte bewegt. Für eine große Anzahl von Punkten wurde dann das Verhältnis der Spannungen Sonde—Kugel K_1 und Sonde—Kugel K_2 bestimmt. Die erhaltenen Spannungen verhalten sich wie die Widerstände auf den gleichen Abständen und lassen sich an den beiden Kurbelrheostaten ablesen, sobald diese solange geregelt sind, bis der Ton im Telephon am leisesten wird. Es wurde z. B. gefunden $r_1 = 22{,}9$ Ohm, $r_2 = 244{,}9$ Ohm. Dementsprechend wird

$$\frac{r_1}{r_1 + r_2} = \frac{22{,}9}{267{,}8} = 0{,}0855.$$

Nehmen wir nun an, der Potentialunterschied zwischen unseren Kugeln betrage 100 V, und das Potential der positiven Elektrode sei + 50 V, das der negativen — 50 V, so wird $50 - 0{,}0855 \times 100 = 41{,}45$ V uns den Wert des Potentials im Punkt, wo die Sonde sich befindet, ergeben.

Derartige Aufnahmen wurden für die Kugeldurchmesser:

$D =$ 15, 10, 5, 3,5, 2,15, 1,5, 1,0, 0,45, 0,3 cm Dmr.

bei den Abständen $A =$ 10, 20, 30, 40 cm ausgeführt.

Die Zuleitungen wurden bei diesen Versuchen sorgfältig durch dicke, festsitzende Gummischläuche abgeblendet. Bei jedem fünften Versuch wurden mit dem Voltmeterumschalter in Abb. 9 die Pole der Wechselstromquelle vertauscht und eine Prüfmessung des fünften Wertes vorgenommen. Die Spannungskurve des Induktoriums hat nach der positiven und negativen Seite hin nicht die gleiche Amplitude. Es war nicht ausgeschlossen, daß die leichte Schwärzung, die sich — allerdings nur bei ganz kleinen Kugeln — an der blank polierten Oberfläche der einen Kugel zeigte, störend auf die Messung der Widerstandsverteilung einwirken konnte. Trotzdem stimmten diese Prüfmessungen stets auf das genaueste mit den anderen überein. Die Stärke der Telephonströme und der Stromdichte auf den Elektroden konnte mit einem Vorschaltwiderstand passend eingeregelt werden. Die Einstellung der Sondenentfernung geschah an zwei messerscharfen Schneiden oben an der Führung der Sonde. Die Ablesung wurde mit einem genauen, in Millimeter eingeteilten Maßstabe mit der Lupe vorgenommen. Es wurde stets die Sonde vor Beginn der Messungen mit der Kugel K_1 in Berührung gebracht, die Entfernung der betreffenden Schneiden gemessen, und dieser Abstand wurde mit „O“ bezeichnet. Die Messungen wurden der Einfachheit halber nur bis zum Mittelpunkt der Entfernung der beiden Kugeln ausgedehnt, da die andere Hälfte als Spiegelbild der ersten genau die gleichen Verhältnisse aufweisen mußte. Dies wurde durch einige Prüfversuche bestätigt. An der Gleichheit der Widerstände R_1 und R_2 hatte man eine Nachprüfung für die Hälfte des Kugelabstandes. Alle Meßwerte, die in Kurvenform aufgetragen sind, zeigen dementsprechend nur den einen Ast der Potentialverteilung. Der andere Ast würde, wie gesagt, ein getreues Spiegelbild des ersteren sein und wurde deshalb auch in den angeführten Schaulinien weggelassen.

Die Genauigkeit der Messungen war groß. Die Meßpunkte fielen kaum aus der eingezeichneten Kurve heraus. Ebenso decken sich die gefundenen Werte gut mit den berechneten. Auf eine Beurteilung des ganzen Meßverfahrens werden wir später eingehen.

Wie schon bemerkt, wurden die Messungen in zwei Behältern verschiedener Größe ausgeführt, wie sie die Abb. 10 und 11 zeigen. Die Schaulinien Abb. 12 und Abb. 13 geben die Aufnahmen der Potentialverteilung für zwei verschiedene Kugelgrößen wieder. Die beiden ausgezogenen Kurven sind nach der Formel der elektrischen Bilder berechnet. Außerdem sind die Meßpunkte für die gleichen Verhältnisse bei den Aufnahmen in der kleinen und großen Wanne aufgetragen. Die Uebereinstimmung beider Meßreihen ist so befriedigend, daß die Störung durch die endliche Größe des Meßgefäßes für die Messung der Potentialverteilung bei der großen Wanne wohl als verschwindend klein angesprochen werden darf, sobald Abstände bis zu etwa 40 cm in Frage kommen.

2) Die Störung der Potentialverteilung durch die Zuleitungen.

Das angegebene Verfahren der Abtastung des Feldes mit einer Sonde hat besondere Bedeutung für die Bestimmung der Störungen, welche die Kugelfunkenstrecke durch ihre eigenen Zuleitungen erleidet. Die Störungen, welche

durch Leiter in der Nähe der Kugeln hervorgerufen werden, sind im folgenden nicht behandelt worden, trotzdem das angegebene Verfahren auch hierfür geeignet ist. Hierauf soll später zurückgegriffen werden.

Unter den unendlich vielen möglichen Durchmessern und Längen der Zuleitungen mußte eine beschränkte Auswahl getroffen werden. Die nachstehenden Messungen beziehen sich sämtlich auf einen Durchmesser der Zuleitungen von 7 mm und Längen der Zuleitungen von $l = 0$, 10, 30, 50 cm bei Abständen von $A = 10$, 20, 30, 40 cm. Sie wurden ausgeführt für die bereits angegebenen Kugeldurchmesser von

$D = 15$, 10, 5, 3,5, 2,15, 1,5, 1,0, 0,45, 0,3 cm Dmr.

Es ergaben sich daher für jeden Durchmesser 16 Meßreihen.

$A = 10$				cm
$l = 0$	10	30	50	»
$A = 20$				»
$l = 0$	10	30	50	»
$A = 30$				»
$l = 0$	10	30	50	»
$A = 40$				»
$l = 0$	10	30	50	»

Diese Messungen sind in den Schaulinien Abb 14 bis Abb. 21 in Kurvenform wiedergegeben. Auf jeden Durchmesser kommt ein Kurvenblatt. Auf die Wiedergabe der gesamten Meßergebnisse in Tabellenform wurde mit Rücksicht auf den Umfang dieser Arbeit verzichtet (es handelt sich um etwa 2100 Meßpunkte für die große Wanne, etwa 1000 für die kleine Wanne).

Für den Durchmesser $D = 15$ cm wurde außerdem die Kurve bei $A = 5$ cm aufgenommen, dagegen fielen die Meßreihen für $A = 30$ und $A = 40$ cm, ebenso bei $D = 10$ cm die Meßreihe für $A = 40$ cm fort, da hierfür die Größe der Wanne nicht ausreichte.

Aus den wiedergegebenen Schaulinien können wir ersehen, daß ganz dicht an der Kugeloberfläche der Potentialgradient so gut wie unabhängig von der Länge der Zuleitung ist. Schon in geringer Entfernung von den Elektroden macht sich der Einfluß der Zuleitungen jedoch bemerkbar. Der Einfluß der Zuleitungen ist bei kleineren Kugeln bedeutender, als bei großen, denn hier bestehen in geringer Entfernung von der Kugeloberfläche bereits bedeutende Unterschiede in der Feldstärke, erkenntlich an der Tangente zu der Potentialverteilungskurve.

Nun scheint die »Anfangsspannung« von der Beanspruchung der ersten dünnen Luftzone an den Kugeln abzuhängen, wobei nach den obigen Ausführungen der Einfluß der Zuleitungen eine untergeordnete Rolle zu spielen scheint. Wir werden im folgenden Kapitel bei der Berechnung der Luftfestigkeit demnach die Rechnungen unter Voraussetzung einer reinen Kugelgestalt der Elektroden durchführen dürfen, also unsere dafür abgeleiteten Formeln anwenden können. Die Stärke der Zuleitung bewirkt bei ganz kleinen Elektroden, wie Nähnadelspitzen, zweifellos größere Unterschiede im Potentialgefälle dicht an der Elektrodenoberfläche, so daß für diese Werte eine umfangreiche empirische Berichtigung angebracht werden müßte. Auf alle Fälle kann man, je größer die Elektroden sind, um so sicherer den Einfluß der Zuleitungen vernachlässigen.

Wir hatten aus der großen Anzahl der möglichen Stärken der Zuleitungen einen Durchmesser von 7 mm ausgewählt, entsprechend den Zuleitungen, wie

sie bei den späteren Hochspannungsversuchen benutzt wurden. Es ist einleuchtend, daß der störende Einfluß stärkerer Zuleitungen größer sein wird, und schwächere Zuleitungen das Feld weniger verändern werden. Eine gewisse untere Grenze in der Bemessung des Durchmessers der Zuleitungen ist durch

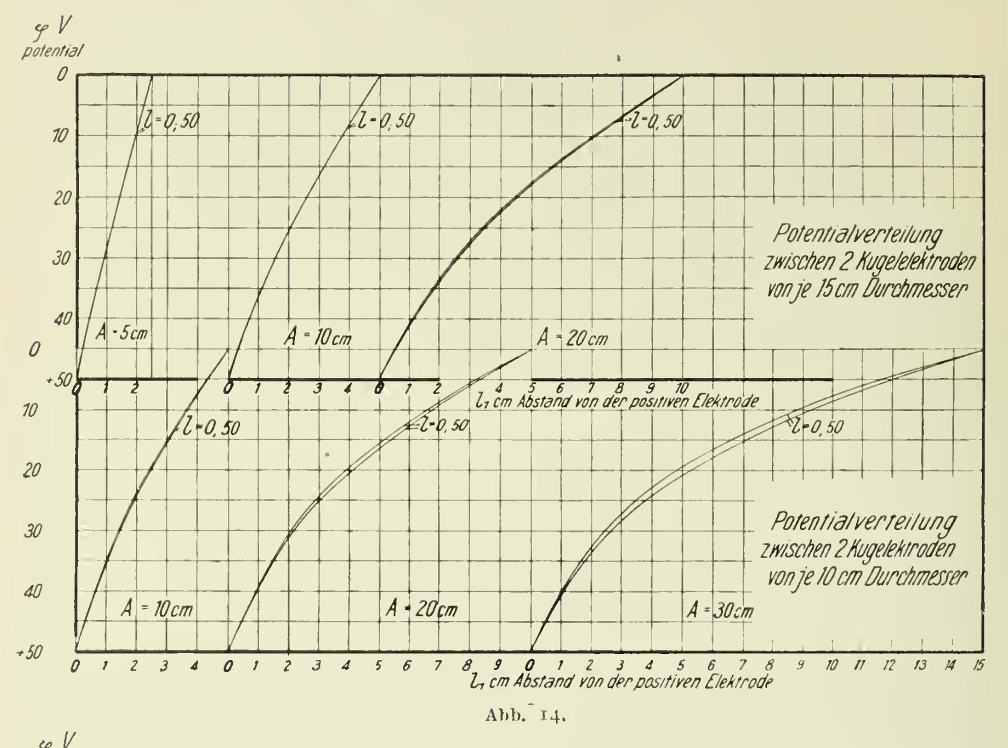


Abb. 14.

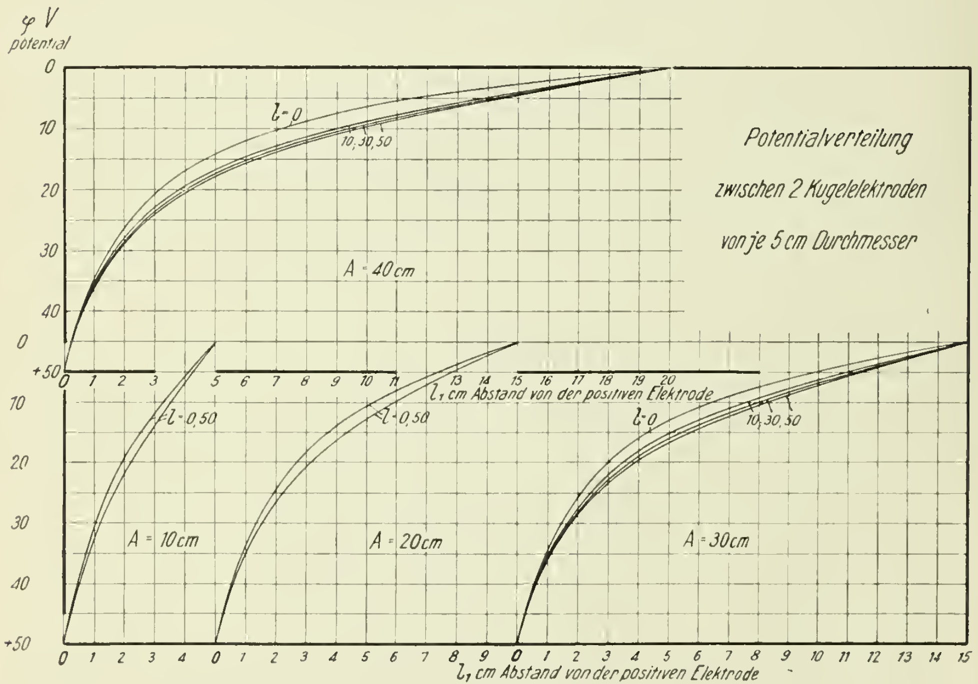


Abb. 15.

die notwendige Stabilität der ganzen Anordnung gegeben, wenn man auch die größeren Kugeln aus möglichst dünnwandigem Blech herstellen könnte.

Der Verfasser will zum Schluß dieses Abschnittes nicht versäumen, das Meßverfahren der Potentialverteilung im Elektrolyten kritisch zu beleuchten.

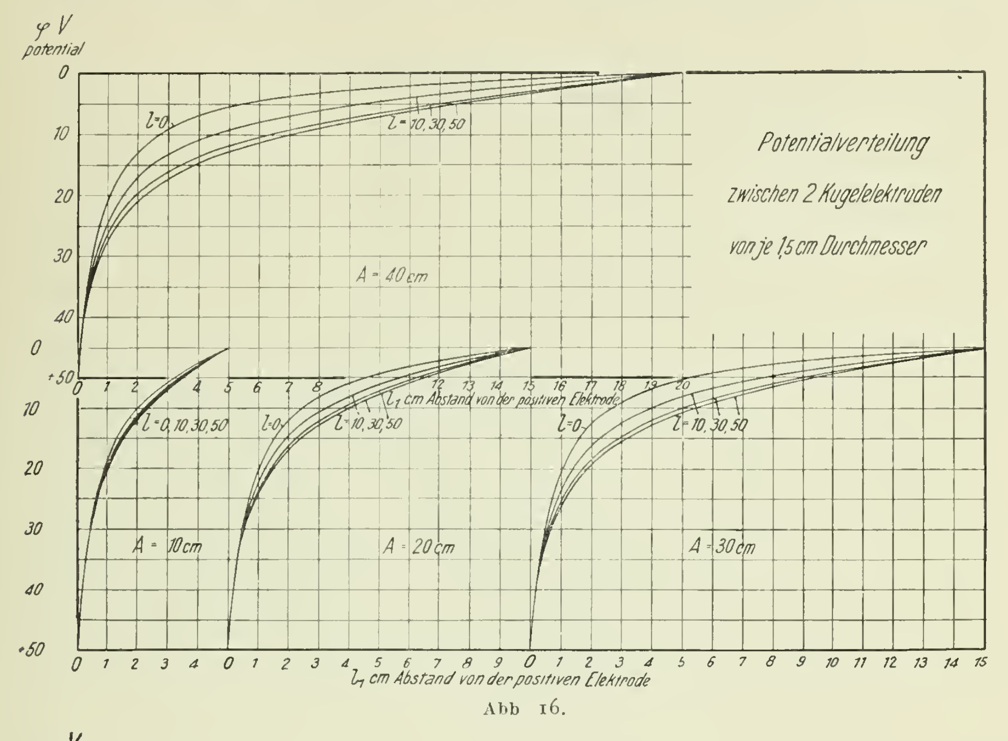


Abb 16.

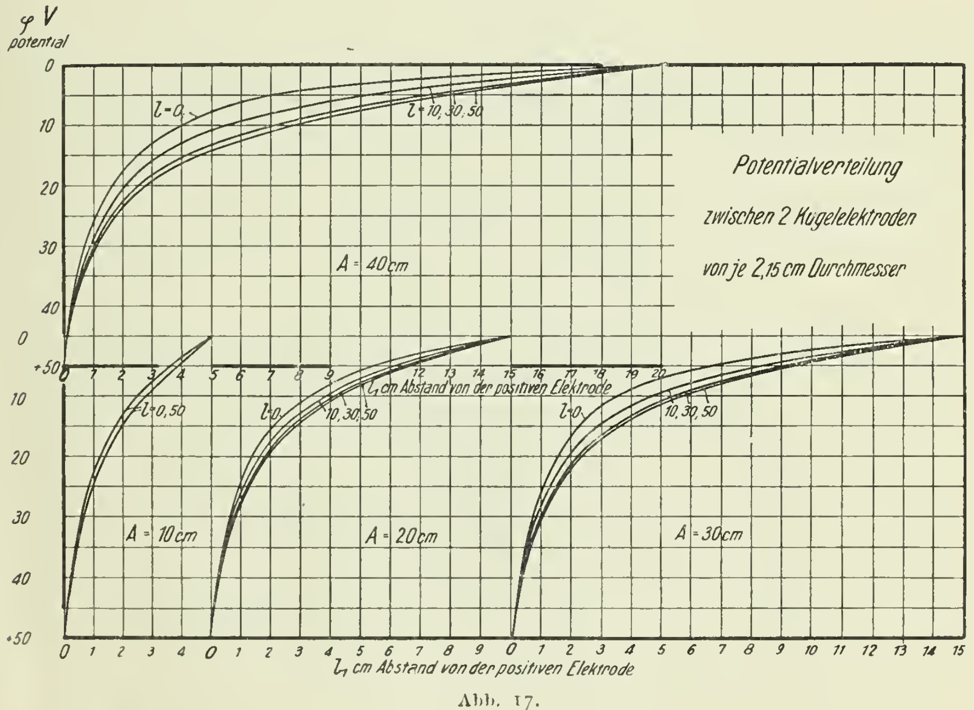


Abb. 17.

Die endliche Größe des Sondenkörpers wirkt um so störender, je schneller der Anstieg der Potentialkurve über der Elektrodenentfernung erfolgt, d. h. je kleiner die Elektroden im Verhältnis zu ihrem Abstande von einander sind. Theoretisch müßte die Sonde punktförmig sein, da sie sonst Punkte verschiedenen Potentials

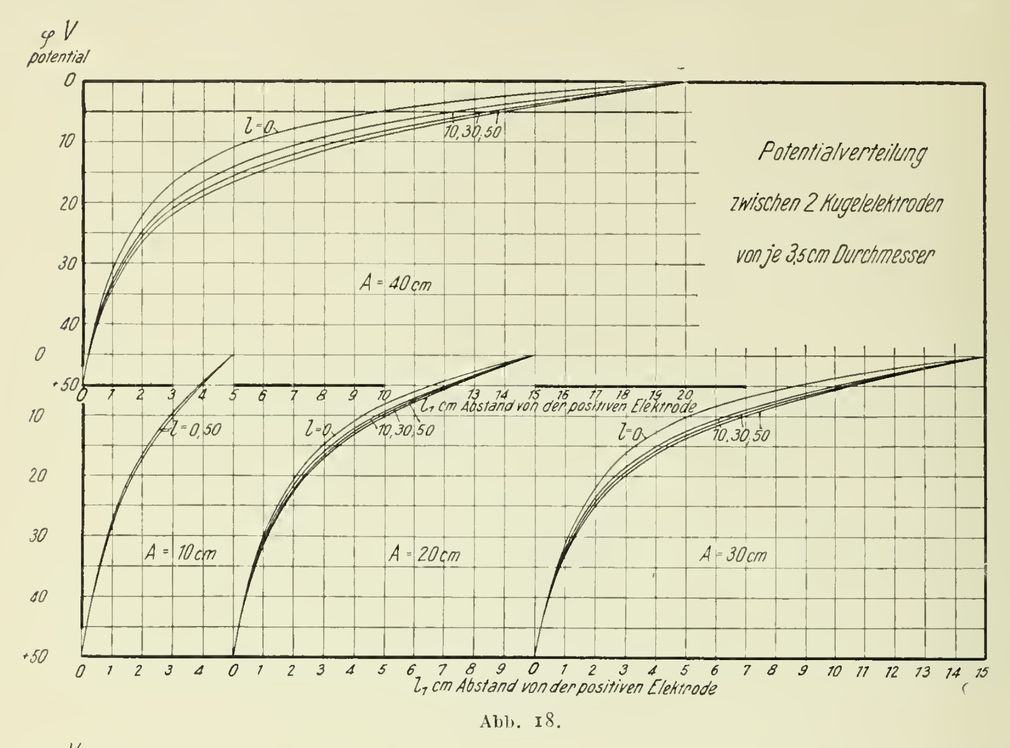


Abb. 18.

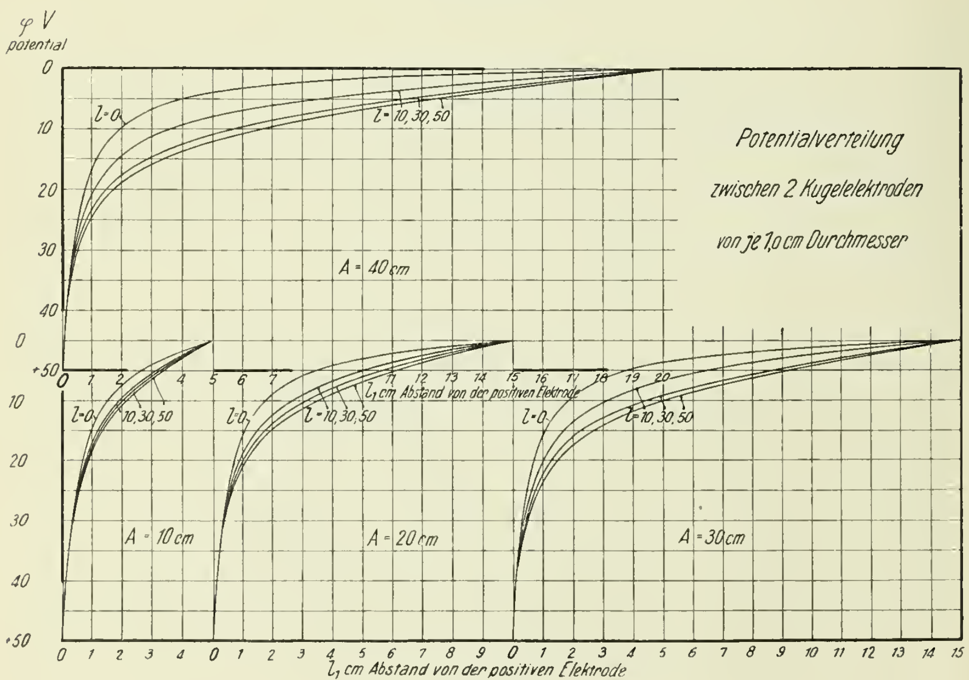


Abb. 19.

mit einander verbindet und das Feld verändert. Anderseits nimmt die Genauigkeit der Widerstandsmessung mit der Wheatstonebrücke ab, je größer der Unterschied der Widerstände zwischen den beiden Brückenzweigen ist, die in unserem Falle in Frage kommen. Es ist die Genauigkeit des angegebenen Verfahrens

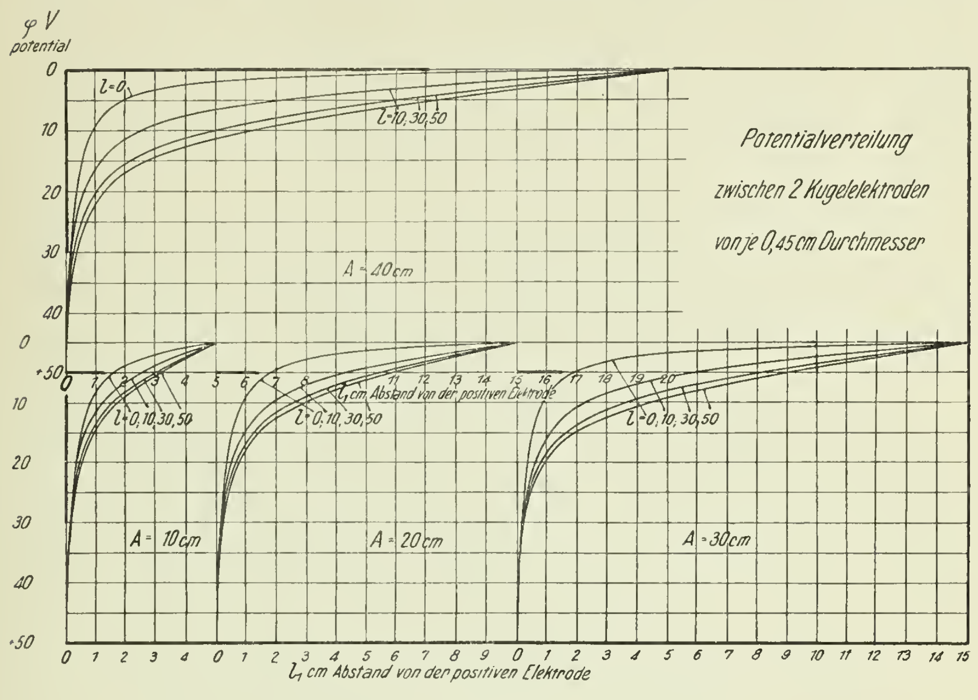


Abb. 20.

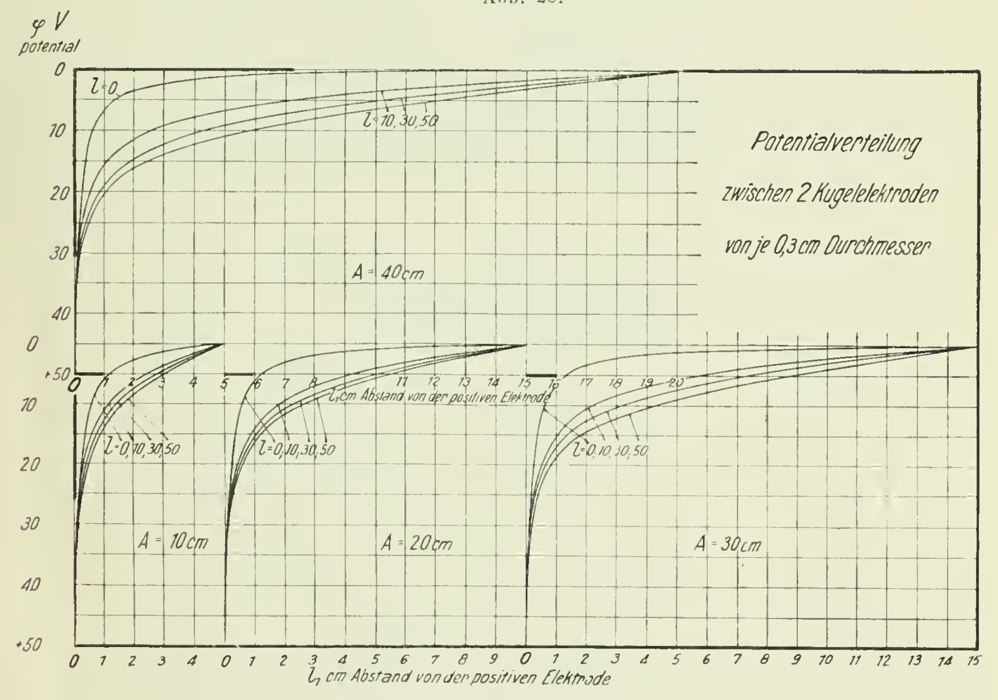


Abb. 21.

zweifellos dort am geringsten, wo wir sie am notwendigsten brauchen, nämlich an der Kugeloberfläche. Anderseits muß bemerkt werden, daß das Verfahren sonst große Genauigkeit aufwies. Wenn wir einen gleichartigen Verlauf der Potentialverteilung bei verschiedenartigen Zuleitungen zeichnerisch wiedergaben, so stützt sich diese Darstellung auch darauf, daß tatsächlich bei kleinen Kugeln mit verschieden starken Zuleitungen die Funkenspannungen im Gebiete der Anfangsspannung keine Unterschiede zeigten. Erlauben wir uns hieraus den Rückschluß, daß dann auch die Feldstärken an der Kugeloberfläche dieselben sind bei verschiedener Art der Zuleitung, so ist der gezeichnete gleichartige Verlauf der Potentialkurven dicht an der Kugeloberfläche gerechtfertigt.

3) Prüfung und Berichtigung der unter A 1 a) gefundenen Ergebnisse.

Aus den Messungen des Widerstandes zwischen zwei Kugeln, die sich in einem hinreichend großen Behälter, der mit Wasser gefüllt ist, befinden, kann man die Kapazität des Kugelkondensators durch Versuch bestimmen[1]). Diese Rechnung stützt sich darauf, daß die Kapazität eines Plattenkondensators $C = \frac{l}{4\pi w}$ ist, wenn wir annehmen, daß die Anzahl der von einer Punktladung Q ausgehenden Kraftlinien $\Phi = 4\pi Q$ ist. l ist der Abstand der Platten. Mit w ist hier der Widerstand des Dielektrikums bezeichnet. Denken wir uns das Dielektrikum (Luft) durch einen Elektrolyten — in unserem Falle gewöhnliches Leitungswasser — ersetzt, so messen wir statt w einen Wert des Widerstandes R_4, der jedoch stets proportional w ist. Das Kraftlinienbild wird in beiden Fällen genau das gleiche Aussehen haben, wie wir schon früher erwähnten. Setzen wir die zu bestimmende Kapazität $C = \frac{c}{R_4}$, so brauchen wir bloß die Konstante c für unseren Elektrolyten noch zu bestimmen, um die Widerstandsmessungen zwischen den Kugeln in Kapazitätswerte umrechnen zu können.

Zur Bestimmung von c wählen wir einen Normalkondensator, Abb. 22, dessen Kapazität genau bekannt ist. Wir ersetzen das Dielektrikum durch eine Probe unseres Leitungswassers und messen den Wasserwiderstand zwischen den beiden Belegungen. In unserem Falle wurde

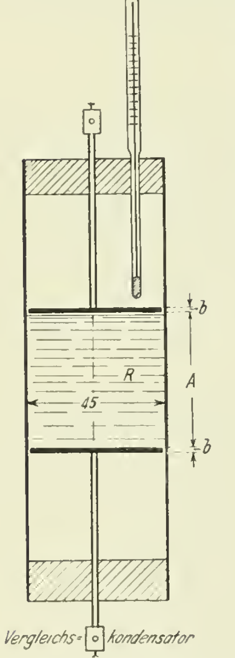


Abb. 22. Vergleichswiderstand und Kondensator.

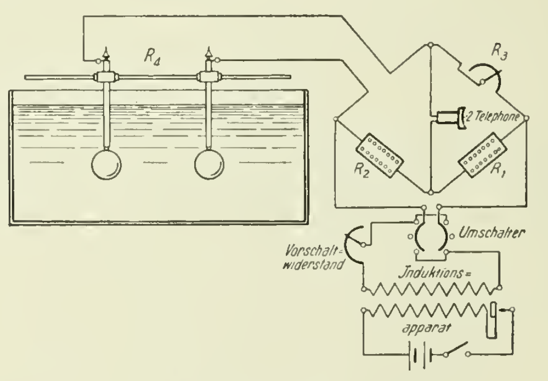


Abb. 23. Schaltschema für die Widerstandsmessungen.

[1]) Siehe auch den Aufsatz von F. Kohlrausch, Verhandlungen der Deutschen Phys. Gesellschaft 8. Jahrg. Nr. 8: »Ueber elektrostatische Kapazität und Widerstandskapazität«.

der Widerstand des verwendeten Wassers zwischen zwei kreisrunden Platten in einem genau passenden Glasrohr bestimmt, Schaltschema Abb. 23. Die Kapazität eines dementsprechenden Kondensators wäre

$$C = \frac{f\,\varepsilon}{4\,\pi\,A}.$$

f bedeutet die Fläche einer Kreisplatte in qcm,
A den Plattenabstand in cm.

Wir setzen für Luft $\varepsilon = 1$ voraus.
Da der Halbmesser der Platten R ist, so wird

$$C = \frac{R^2}{4\,A}.$$

Wir ermitteln demnach unsere Konstante zu

$$c = C\,R_4 = \frac{R^2}{4\,A}\,R_4.$$

In unserem besonderen Falle wurde diese Konstante zu $c = 115$ ermittelt, und es wurden hiermit die Widerstandsmessungen auf Kapazitätswerte umgerechnet.

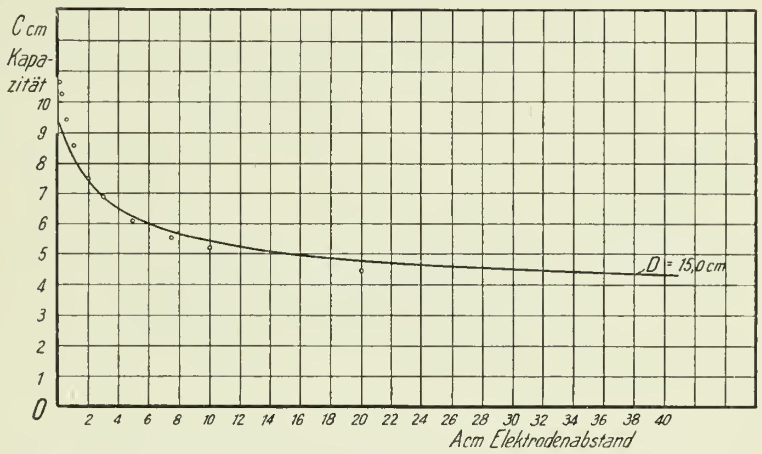


Abb. 24. Kapazität des Kugelkondensators in Funktion vom Abstande A.

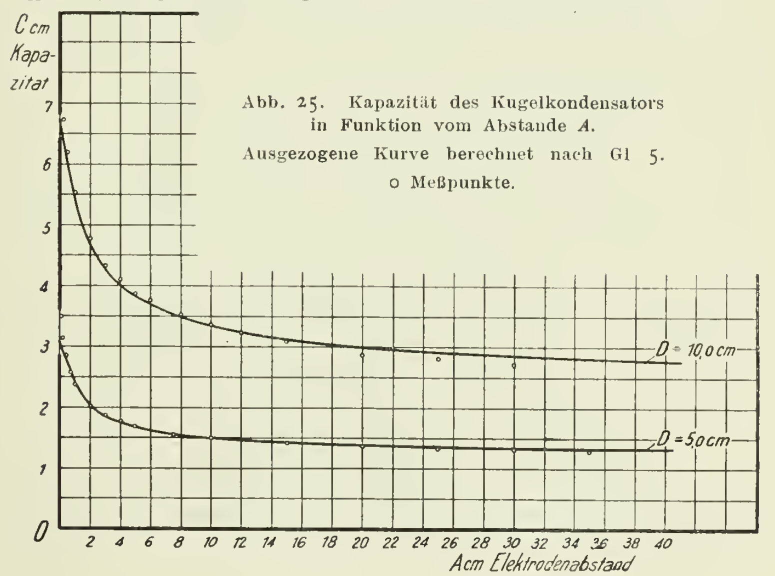


Abb. 25. Kapazität des Kugelkondensators in Funktion vom Abstande A.
Ausgezogene Kurve berechnet nach Gl 5.
o Meßpunkte.

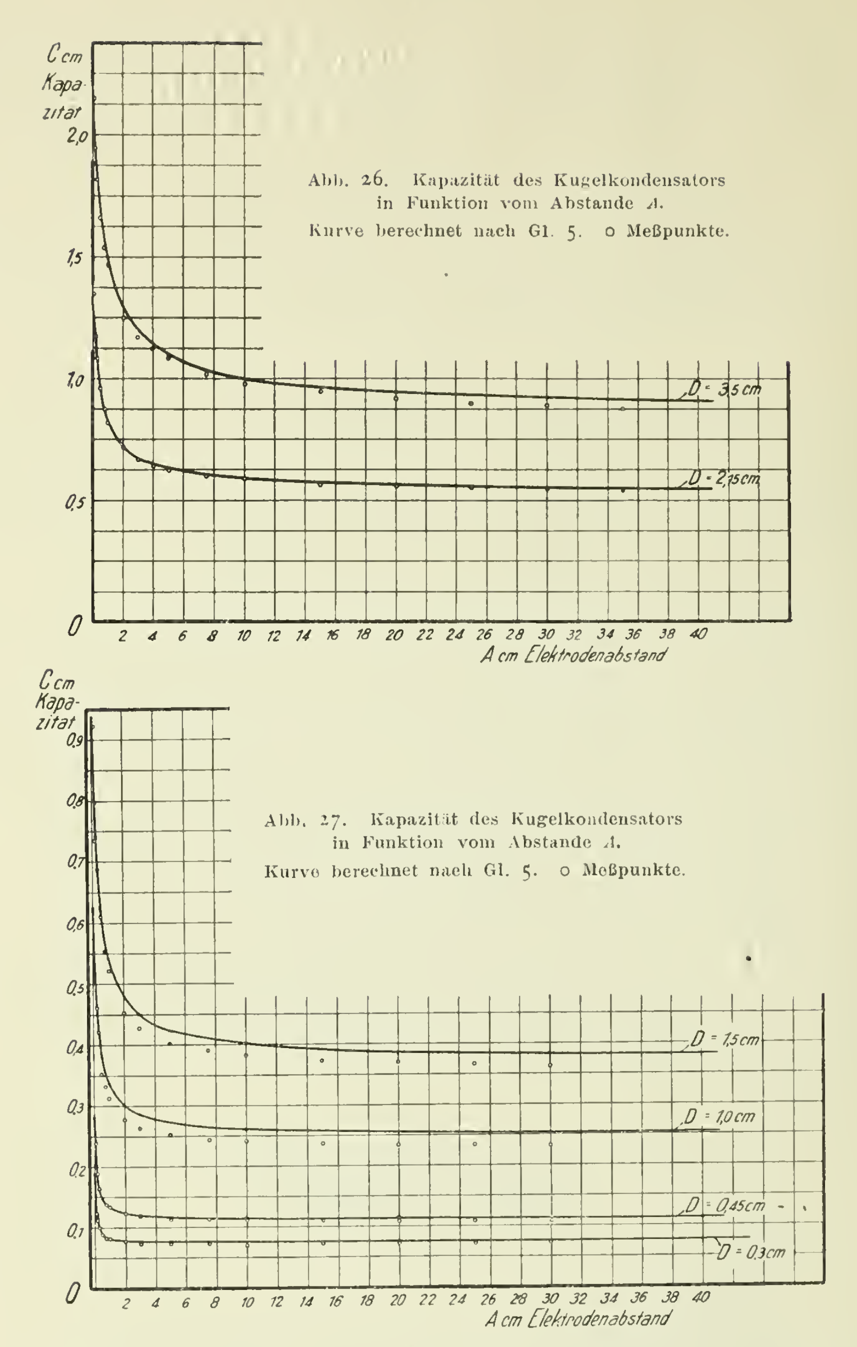


Abb. 26. Kapazität des Kugelkondensators in Funktion vom Abstande A. Kurve berechnet nach Gl. 5. o Meßpunkte.

Abb. 27. Kapazität des Kugelkondensators in Funktion vom Abstande A. Kurve berechnet nach Gl. 5. o Meßpunkte.

Im vorigen Abschnitt war die Formel für die Kapazität eines Kugelkondensators (5) angegeben worden. Hiernach wurde für die Kugeldurchmesser:

$$D = 15, \quad 10, \quad 5, \quad 3{,}5, \quad 2{,}15, \quad 1{,}5, \quad 1{,}0, \quad 0{,}45, \quad 0{,}3 \text{ cm}$$

die Kapazität in Funktion vom Abstande ausgerechnet und in den Kurventafeln Abb. 24 bis Abb. 27 aufgetragen. In die gleichen Schaubilder wurden zum Vergleich die nach dem Widerstandsverfahren ermittelten Kapazitäten als Punkte eingetragen. Die Zuleitungen waren abgeblendet. Alle Aufnahmen wurden bei der gleichen Temperatur des Wasserbades (16° C) durchgeführt, da sonst eine Be-

richtigung der Widerstandswerte auf Temperatur hätte vorgenommen werden müssen. Die Meßpunkte für die 1,5 cm- und 1,0 cm-Kugeln liegen etwas zu tief, da durch das häufige Putzen die Durchmesser der betreffenden Kugeln um etwa 0,5 mm abgenommen hatten.

Dieses Widerstandsmeßverfahren wurde in erster Linie angewendet, um die Rechnungsergebnisse zu prüfen, insbesondere aber, um die aus den Formeln berechneten Kapazitäten für sehr kleine Elektrodenbestände berichtigen zu können. Die nach den Formeln berechneten Kapazitäten für den Abstand $A = 0$ sind endliche Größen, während für den Abstand $A = 0$ die Kapazität unseres Kondensators $C = \infty$ werden müßte, da ja der Widerstand des Dielektrikums bei Berührung der Kugeln auf 0 herabgeht. Wenn auch dieser Fall keine praktische Bedeutung hat, so erlaubt doch das Widerstandsverfahren, die Kapazität sehr genau, besonders für kleine Abstände zu bestimmen.

Um auch für diese Messungen den Einfluß der Größe der verwendeten Wanne und der Menge des Wassers zu bestimmen, wurden die Widerstände in der kleinen Wanne und in der großen Wanne von 55 l und 800 l Inhalt gemessen. Außerdem wurde aus der Kapazitätsformel unter Benutzung der Konstante $c = 115$ der Widerstand r_4 zurückgerechnet und nebst den beiden obigen Widerstandsmessungen zum Vergleiche in die Kurventafel Abb. 28 eingetragen.

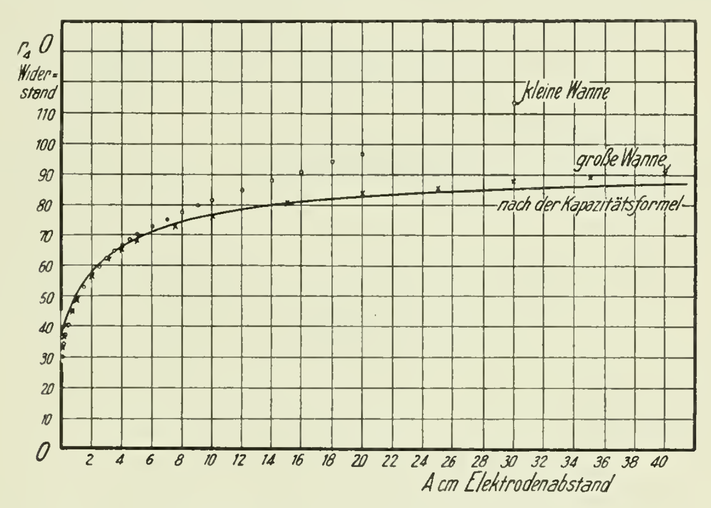


Abb. 28. Einfluß der Wannengröße auf die Widerstandsmessungen des Wassers zwischen zwei Kugelelektroden von je 5,0 cm Dmr.

Hieraus ersieht man, daß die kleine Wanne bis etwa zu $A = 4$ cm, die große bis zu etwa $A = 15$ cm Abstand der Elektroden noch gute Messungen erlaubt. Diese Messungen gelten für einen Kugeldurchmesser von 5 cm. Die Ergebnisse werden für kleinere Kugeln günstiger und erlauben noch größere Abstände. Für größere Kugeln darf man umgekehrt nur bis zu kleineren Abständen zugunsten der Genauigkeit der Ergebnisse gehen. Je größer die Abstände anderseits sind, desto genauer sind die Ergebnisse der angegebenen Formel.

Die obigen Messungen lassen Rückschlüsse über den Einfluß der Größe des Raumes zu, in dem ein Kugelkondensator sich befindet. Wir müßten für Hochspannungsversuche die Wände des Versuchsraumes als gut leitend annehmen und könnten dem Einfluß der Wände bei unseren Widerstandsmessungen dadurch Rechnung tragen, daß wir statt der verwendeten Steinzeugwanne eine

solche etwa aus Zinkblech wählten. Die Kapazität müßte dann in dem Maße wachsen, wie der Widerstand fällt. Auf die Aufnahme derartiger Störungen wurde jedoch verzichtet, da in praktisch vorkommenden Fällen der zur Verfügung stehende Raum wesentlich größer zu sein pflegt, als die in unserem Falle benutzte Steinzeugwanne.

Wohl aber ließe sich der Einfluß eines in der Nähe des Kondensators befindlichen Leiters von beliebiger Gestalt genau durch unser Meßverfahren feststellen.

Auf weitere Anwendungsmöglichkeiten dieser Meßmethode soll später am Schluß dieser Arbeit kurz eingegangen werden. Es kann natürlich auch der Einfluß von Zuleitungen jeder Art auf die Größe der Kapazität in der vorstehenden Weise untersucht werden, doch wurde hierauf sowohl mit Rücksicht auf den Umfang der Arbeit, als auch deshalb verzichtet, weil die Kapazitätsbestimmungen erst in zweiter Linie für uns in Frage kamen.

Auf zwei kurze Beispiele wollen wir noch hinweisen.

Bekanntlich erfolgt die Abnahme der Kapazität eines Kreisplattenkondensators nicht proportional der Entfernung der beiden Platten, da bei Vergrößerung des Plattenabstandes die störende »Randwirkung« zunimmt.

Kirchhoff versuchte die Kapazität eines solchen Kondensators rechnerisch zu ermitteln. Wir geben im folgenden die von ihm aufgestellte Formel, wie sie Kohlrausch angibt, wieder:

$$C = \frac{r^2}{4\,a} + \frac{r}{4\,\pi}\left(\ln\frac{16\,\pi\,r\,(a+d)}{a^2} - 1 + \frac{d}{a}\ln\frac{a+d}{d}\right).$$

Nach dieser Formel, in der

r den Halbmesser der Platten,
a » Abstand » »
d die Dicke » »

bedeutet, wurde für den Fall: $r = 7{,}5$ cm, $d = 0{,}15$ cm die Kapazität bei verschiedenen Abständen bestimmt und in Kurvenblatt Abb. 29 als Schaulinie aufgetragen. Dann wurde die Kapazität desselben Kondensators nach dem Wider-

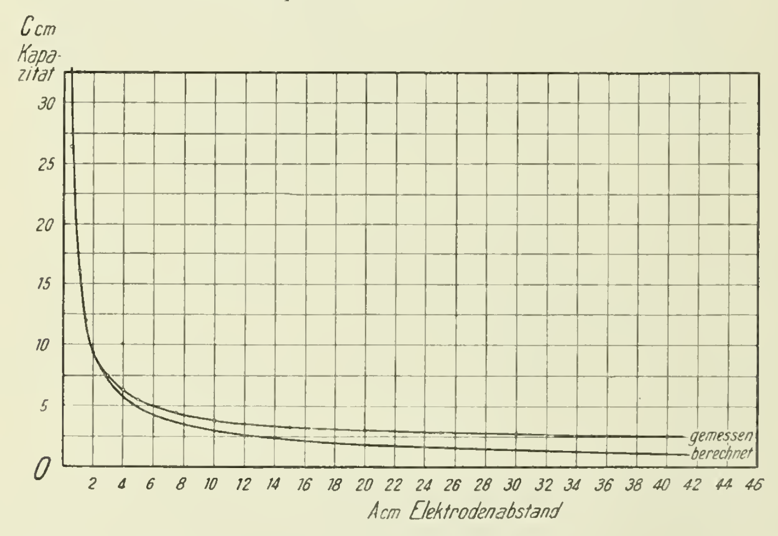


Abb. 29. Bestimmung der Kapazität eines Kreisplattenkondensators durch Widerstandsmethode und Berechnung nach der Kirchhoffschen Formel $C = \frac{r^2}{4a} + \frac{r}{4\pi}\left(\ln\frac{16\,\pi\,r\,(a+d)}{a^2} - 1 + \frac{d}{a}\ln\frac{a+d}{d}\right)$.

standsmeßverfahren im Elektrolyten durch Versuch ermittelt und vergleichsweise in das gleiche Schaubild eingetragen. Infolge der endlichen Behältergröße hätten wir bei größeren Entfernungen zu große Widerstände, dementsprechend zu kleine Kapazitäten ermittelt. Trotzdem liegt die Kurve nach Kirchhoff weit unter der durch Versuch gefundenen: ein Beweis, daß die angegebene Gleichung die Ausbreitung der Kraftlinien vom Rande in den benachbarten Raum nicht genügend berücksichtigt.

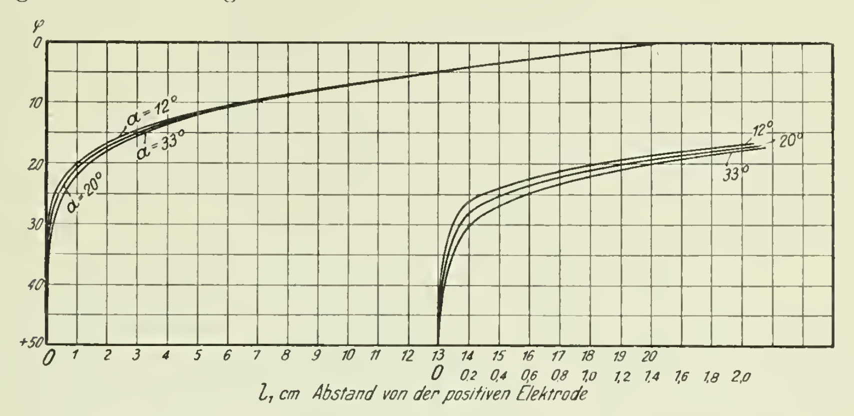


Abb. 30. Aufnahme der Potentialverteilung zwischen zwei Spitzenelektroden von $\alpha = 12^0$, $\alpha = 20^0$, $\alpha = 33^0$ mit $l = 50$ cm langen Zuleitungen von 7 mm Dmr.

Das Kurvenblatt Abb. 30 zeigt die Aufnahme der Potentialverteilung zwischen Spitzenelektroden mit 7 mm starken Zuleitungen und den Oeffnungswinkeln von 12, 20 und 33 Grad.

Teil II.

Die Funkenspannung zwischen Kugelektroden.

Versuchseinrichtung.

Die folgenden Versuche wurden ausgeführt im elektrotechnischen Versuchsfelde der Kgl. Technischen Hochschule zu Berlin. Für die Messungen stand ein Hochspannungstransformator der S. S. W. von 20 kW Leistung zur Verfügung. Die beiden Wicklungen der Hochspannungsseite ließen sich parallel und in Reihe schalten, entsprechend den Uebersetzungsverhältnissen 500/100000 bezw. 500/200000 V. Für die nachstehenden Versuche wurde ausschließlich die Reihenschaltung mit dem Uebersetzungsverhältnis 1 : 400 gewählt. Zur Lieferung des Wechselstromes konnten zwei Maschinen von je rd. 50 kW Leistung und einer Spannung bis 500 V herangezogen werden, deren Antriebmotoren und Erregung von einer Akkumulatorenbatterie von 220 V gespeist wurden. Die Batterie diente während der Dauer der Versuche zu keinem anderen Zwecke, so daß Spannungsschwankungen mit Sicherheit vermieden wurden. Hauptsächlich wurde die Maschine 7, ein Drehstromgenerator mit Einlochwicklung zur Stromlieferung herangezogen, zu einigen Prüfversuchen die Maschine 31, die eine genaue Sinusform der Spannungskurve lieferte. Bei beiden Maschinen wurde die ver-

kettete Spannung verwendet. Die Spannung wurde teils durch einen in den Primärkreis des Transformators eingeschalteten Wasserwiderstand, hauptsächlich aber durch die Erregung des Generators geregelt. Vor dem Hochspannungstransformator war ein Stufentransformator angeordnet. Hiermit konnte die dem Hochspannungstransformator zugeführte Unterspannung in 10 Stufen geändert werden, während die Maschinenspannung nur in mäßigen Grenzen geregelt zu werden brauchte. Auf diese Weise hätte die starke Beeinflussung des Scheitelfaktors durch große Aenderungen in der Erregerstromstärke umgangen werden können. Bei den vorliegenden Versuchen konnte auf eine Benutzung dieses Stufentransformators verzichtet werden, da, wie später erläutert werden soll, die Höchstwerte der Spannungskurve selbst beobachtet wurden. Aus dem gleichen Grunde war auch die Vorschaltung eines Wasserwiderstandes erlaubt. Das Uebersetzungsverhältnis dieses Transformators wurde demnach dauernd 1 : 1 belassen.

Spannungsmessung mit dem Oszilloskop.

Die Spannungsmessungen mußten sich auf die Unterspannungseite beschränken, da der zur Verfügung stehende Hochspannungstransformator keine Prüfspule oder Anzapfung einer Oberspannungspule besaß. Zur Bestimmung der Höchstwerte der Unterspannung wurde ein Apparat benutzt, der in seinem

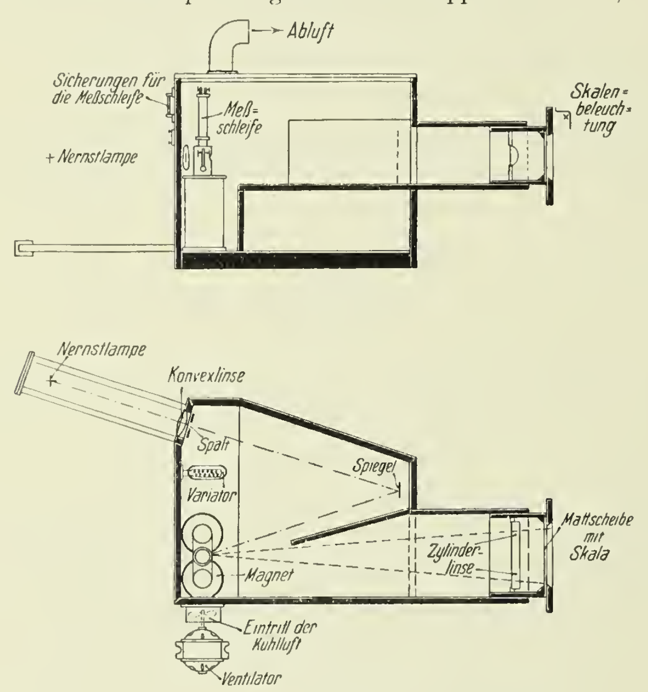


Abb. 31. Schematische Darstellung des Oszilloskopes.

inneren Aufbau Aehnlichkeit mit einem Oszillographen besitzt, und der im folgenden Oszilloskop[1]) genannt werden soll, Abb. 31.

Die zu messende Spannung wird über einen veränderbaren Vorschaltwiderstand von bekannten Größenabmessungen zu einer Oszillographenmeßschleife

[1]) Der Apparat wurde auf Vorschlag des Herrn Regierungsbaumeisters Gerstmeyer vom Verfasser erbaut.

geführt. Der schwingungsfähige Teil der Schleife liegt zwischen den Polschuhen eines Elektromagneten. Wird die Schleife von einem Strom durchflossen, so erfährt der auf den Spiegel der Schleife fallende Lichtstrahl eine Ablenkung, die auf einer matten Glasscheibe, welche mit einer Teilung versehen ist, sichtbar wird. Der Strahlengang im Apparat ist aus Abb. 31 ersichtlich. Als Lichtquelle ist eine starke Nernstlampe gewählt, deren Variator in dem Holzgehäuse des Oszilloskops untergebracht ist. Das leuchtende Magnesiastäbchen der Lampe läßt sich durch Einstellschrauben in jede gewünschte Lage bringen. Die von der Lampe ausgehenden Strahlen werden von einer Konvexlinse parallel gerichtet und treten dann durch einen verstellbaren Spalt, von dessen Breite die Schärfe des Bildes auf der Teilung abhängt. Ein fester Spiegel wirft die Strahlen auf den kleinen Schleifenspiegel, der sie auf die mit Teilung versehene Mattscheibe zurückwirft. Zuvor werden die Strahlen durch eine Zylinderlinse zu einem Bande von rd. 5 mm Höhe zusammengezogen. Der Ausschlag der Schwingungen der Schleife ist proportional dem Höchstwert des Wechselstromes, so daß die Breite des auf der Teilung erscheinenden leuchtenden Bandes ein Maß für die größte Stromstärke in der Schleife darstellt.

Die Beobachtung des Höchstwertes durch das Oszilloskop erübrigt die sonst notwendige Eichung des verwendeten Generators auf die Scheitelfaktoren der Spannungskurve in Abhängigkeit von der Erregerstromstärke des Generators und erlaubt, die Spannung auch durch Vorschaltwiderstände im Unterspannungskreis des Transformators zu regeln. Ebenso kann jede beliebige Kurvenform verwendet werden, ohne daß dadurch die Messung im geringsten umständlicher wird.

Die Meßschleife wurde jedesmal nach Aufnahme von zwei Meßpunkten zu je 5 und 10 Einzelwerten mit Gleichstrom nachgeeicht. Die Größe des Gleichstromes war so bemessen, daß die Schleife einen mittleren Ausschlag machte. Statt des bei Wechselstrom erscheinenden Bandes wurde jetzt der strichförmige Lichtzeiger auf der Mattscheibe vom Nullpunkt um einen gewissen Betrag nach rechts oder links abgelenkt, je nach der Richtung des die Schleife durchfließenden Gleichstromes. Beobachtet wurden die beiden Ablenkungen des Lichtzeigers und die Schleifenstromstärke. Aus dem Mittel dieser Werte konnte die Stromstärke berechnet werden, die nötig war, um den Lichtzeiger um einen Teilstrich abzulenken. Auf diese Weise konnten die bei Wechselstrom beobachteten Ausschläge in Ampere umgerechnet werden; die Größe des Vorschaltwiderstandes ließ dann die Unterspannung des Hochspannungstransformators berechnen. Der so erhaltene Wert wurde dann noch mit dem Uebersetzungsverhältnis des Transformators (1 : 400) multipliziert und ergab den Wert der Spannung auf der Oberspannungseite.

Besonderer Wert mußte auf die unveränderliche Erregung des Oszillographenmagneten gelegt werden. Die gewöhnliche Ausführung eines solchen Elektromagneten, wie er auch in unserem Instrument verwendet wurde, ist für Dauerbetrieb ungeeignet, da sich seine Wicklung zu stark erwärmt. Es wurde daher durch einen Schiebewiderstand, der in den Stromkreis des Magneten eingeschaltet war, die Stromstärke verringert und ständig an einem Amperemeter nachgeprüft. Die Erregerstromstärke mußte mit 0,45 Ampere (220 Voltschaltung) kleiner als bei dem gewöhnlichen Oszillographen gehalten werden (rd. 0,7 Amp.), um sie auch bei erhöhtem Wicklungswiderstand stets gleich halten zu können. Schaulinie Abb. 32 zeigt die Abhängigkeit der Eichung der Schleife, d. h. der Milli-Ampere/Grad-Ausschlag, vom erregenden Magnetstrom. Bei dem Wert 0,45 Amp ist das Eisen des Magneten noch ziemlich gut gesättigt. Trotz der

verkleinerten Stromstärke war die abzuführende Wärme des Magneten noch derartig groß, daß für eine künstliche Kühlung gesorgt werden mußte. In Abb. 31 ist ein kleiner Ventilator eingezeichnet, der ständig Kühlluft gegen die Magnetschenkel blies. Eine Stunde vor Beginn eines jeden Versuches wurden der Magnet und der Ventilator eingeschaltet, um für die Messungen einen Beharrungszustand auszubilden. Diese Vorsichtsmaßregel erwies sich als notwendig, da sich die Eichung der Schleife auch von der Temperatur des Dämpfungsöles abhängig erwies. Schaulinie Abb. 33 zeigt beispielsweise die ständige Aende-

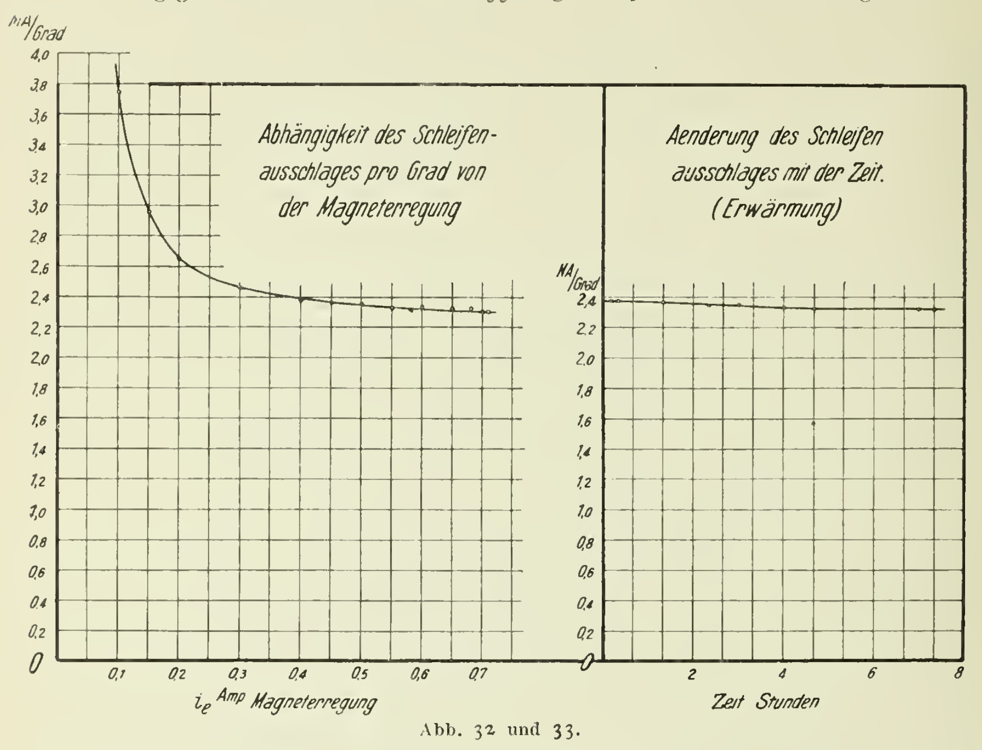


Abb. 32 und 33.

rung der Eichung bei einem normalen Versuche von $7\frac{1}{2}$ Stunden Dauer, wobei das Oel, trotzdem der Ventilator dauernd Kühlluft einblies, sich wahrscheinlich noch langsam weiter erwärmte. Die Schleife wird mit zunehmender Temperatur empfindlicher, d. h. ein geringerer Strom genügt, um einen Ausschlag von 1^0 an der Teilung hervorzurufen. Hierbei dürfte ihre Eigenschwingungszahl sinken. Es ist dies vielleicht eine Folge der Ausdehnung des Schleifendrahtes und einer Erschlaffung der ihn spannenden Feder. Man ersieht hieraus, wie notwendig es ist, bei oszillographischen Messungen die Eichungen regelmäßig bei jeder Aufnahme ohne große Zwischenpausen zu wiederholen, besonders dann, wenn auch der Erregerstrom des Magneten nicht genau derselbe bleibt.

Selbsttätige Abschaltvorrichtung des Transformators.

Wie schon oben bemerkt, wurde ein Wasserwiderstand in den Stromkreis der Unterspannungseite eingeschaltet. Wurde dieser Widerstand kurz geschlossen, so traten die Entladungen auf der Hochspannungseite stets als Lichtbogen auf und erwärmten besonders die kleineren Kugeln unzulässig stark. Die Kugeln von 0,3 und 0,45 cm Durchmesser wurden sogar bis zum Schmelzen gebracht. Bei mittleren Kugeln wurde die Oberfläche stark angegriffen, gerauht

und geschwärzt, und dann bei stark erwärmten Elektroden die Funkenspannung auffällig stark herabgesetzt. Für die folgenden Untersuchungen wurde daher stets der Wasserwiderstand vorgeschaltet, wodurch die Stärke der Entladungen erheblich gemildert wurde und nur Knallfunken auftraten. Trotzdem wurden die blank polierten Oberflächen der Kugeln noch immer angegriffen. Es wurde deshalb dafür gesorgt, daß sofort nach Funkenübergang der Transformator selbsttätig abgeschaltet wurde. Hierfür diente die in Abb. 34 schematisch skiz-

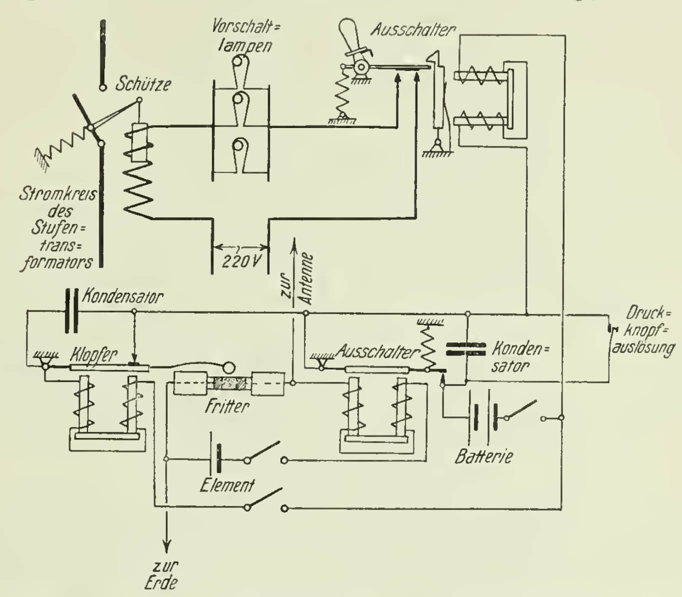
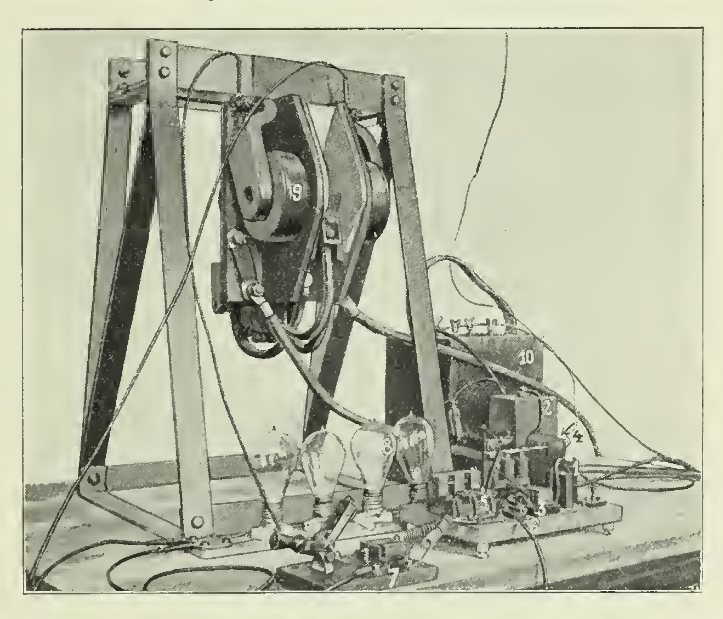


Abb. 34. Selbsttätige Abschaltvorrichtung.



1. Fritter, 2. Element des Fritterstromkreises, 3. Relais I, 4. Klopfer, 5. Blitzableiter, 6. Erdverbindung, 7. Relaisschalter II, 8. Glühlampenvorschaltwiderstand, 9. Hauptschalter (Schütze der Berliner Hochbahn mit magnetischer Funkenlöschung), 10. Batterie des Relaisschalters II, betätigt durch Relais I.

Abb. 35. Selbsttätige Abschaltvorrichtung des Haupttransformators, betätigt durch die von der Funkenstrecke ausgehenden elektrischen Wellen.

zierte und im Lichtbild Abb. 35 wiedergegebene Schaltanordnung. Die Funkenentladung ist schwingend und beeinflußt den mit einer einfachen Drahtantenne versehenen Fritter. Durch den Fritter, der sich nebst Zubehör innerhalb des Hochspannungsraumes befindet, wird der Magnetstromkreis eines Relais geschlossen, das wiederum den Magnetkreis eines Relaisschalters schließt. In dem Augenblick, wo dieser Magnetkreis erregt wird, unterbricht der Relaisschalter, von Federkraft geschnellt, den Erregerstromkreis des Hauptschalters, der den Wechselstromkreis unterbricht. Der letztere Hauptschalter war eine Schütze mit magnetischer Funkenlösehung, wie sie bei den Triebwagen der Berliner Hochbahn verwendet wird. Bei jedem Ansprechen des Fritters wurde nebenbei der Stromkreis eines Klopfers geschlossen und der Fritterkreis von neuem empfangsbereit gemacht. Trotz der Trägheit der verschiedenen Relais wurde der Wechselstrom meist nach Uebergang des dritten Funkens abgeschaltet, d h. nach 0,03 sk. (Siehe Lichtbild P 6.) Eine besondere Abstimmung des Systems erwies sich als nicht erforderlich. Es konnten mit der selbsttätigen drahtlosen Abschaltung auch die Funkenspannungen zwischen kleinsten Kugeln und Spitzen gut untersucht werden, ohne die Oberflächen der Elektroden anzugreifen.

A) Aufnahme der Funkenspannung zwischen Kugelelektroden.

1) Prüfmessungen unter Verwendung verschiedener Spannungskurven.

Bevor die mit dem Oszilloskop gemessenen Werte der Funkenspannung den folgenden Rechnungen zugrunde gelegt werden, soll durch Versuche der Nachweis erbracht werden, daß die Funkenspannung sowohl im Gebiete der Anfangs-, als auch der Glimm- und Büschel-Grenzspannung nur vom Höchstwerte der Spannungskurve abhängig ist.

Es wurden, wie schon oben erwähnt, zwei Maschinen, M 7 und M 31, zu diesen Versuchen benutzt. Da außerdem der in den Spannungskreis eingeschaltete Wasserwiderstand eine erhebliche Verzerrung der Kurvenform bedingte, wurden auch Messungen bei eingeschaltetem Wasserwiderstand ausgeführt. Um einmal über den vollen Spannungsbereich des Transformators die Funkenspannung im Gebiet der Anfangsspannung, das andere Mal im Gebiet der Glimm- und Büschel-Grenzspannung zu untersuchen, wurden im ersten Falle ein Paar Kugeln von 10 cm Dmr., im zweiten ein Paar von 0,45 cm Dmr. verwendet. Es ergaben sich hiernach vier Meßreihen für die großen Kugeln, zwei Meßreihen für die kleinen.

I. D = 10 cm Dmr.

M 7. (Einlochwicklung)

1) Wasserwiderstand nahezu kurz geschlossen.
2) » halb eingeschaltet.

M 31. (Sinusform)

1) Wasserwiderstand nahezu kurz geschlossen.
2) » halb eingeschaltet.

II. D = 0,45 cm Dmr.

Für die kleinen Kugeln wurde der Wasserwiderstand stets zur Hälfte eingeschaltet, weil die Kugeln bei kleinem Wasserwiderstand zu schnell verbrannten.

1) M 7 Wasserwiderstand halb eingeschaltet,
2) M 31 » » » .

Um die Form der Spannungskurven festzuhalten, wurden kurz vor dem Ueberschlag, d. h. bei etwas geringerer Spannung als der Funkenspannung, Oszillogramme aufgenommen.

Die Schaltanordnung für diesen Versuch ist aus Abb. 36 ersichtlich. Ein Umschalter erlaubt, den Transformator an die Wechselstromgeneratoren M 7 oder M 31 zu legen. In den Stromkreis ist ein Siemens-Wattmeter-Umschalter

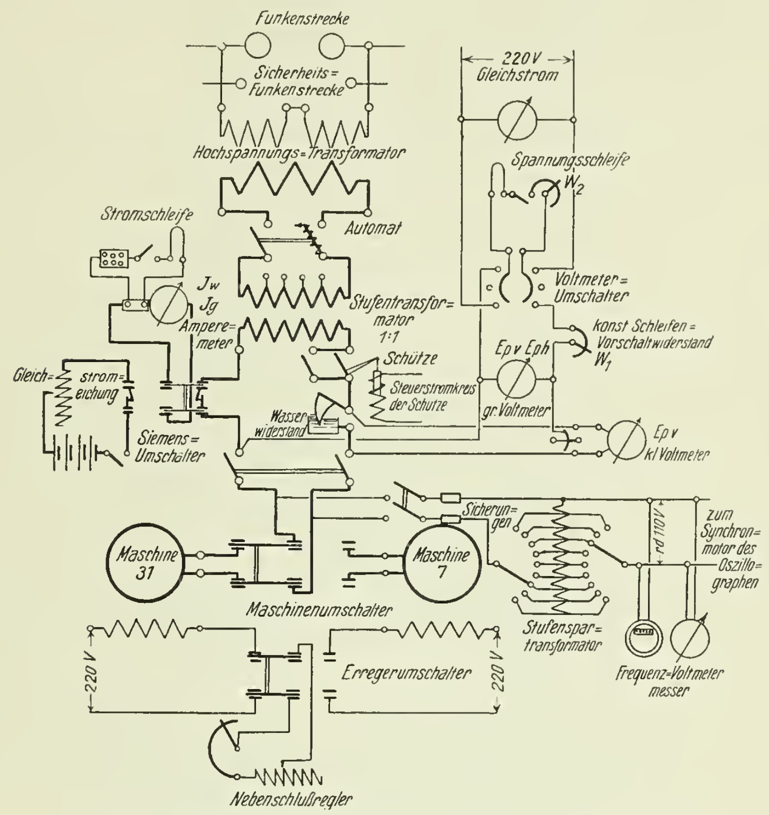


Abb. 36. Schaltschema für die Aufnahme der Oszillogramme.

eingebaut, so daß die Strommeßschleife sowohl in den Wechselstromkreis wie in einen von Akkumulatoren gespeisten Gleichstromkreis zum Zwecke der Eichung des Ausschlages eingeschaltet werden kann. Aehnlich ist die Spannungsschleife auf Wechsel- und Gleichstrom schaltbar. Ein Spannungsmesser läßt die Spannung am Wasserwiderstande, ein zweiter davor und dahinter messen. Der Gleichstromeichkreis für die Spannung wird von der 220 V-Akkumulatorenbatterie gespeist. Ueber einen Stufen-Spartransformator ist ein Frequenzmesser und der Synchronmotor des Oszillographen angeschlossen.

In den Schaulinien Abb. 37 und Abb. 38 sehen wir das Ergebnis der vorstehenden Versuche. Jeder Meßpunkt stellt das Mittel aus fünf Einzelmessungen dar. Bei den Kugeln von 0,45 cm Dmr. wurden im Gebiete der Glimmgrenzspannung zwei Meßwerte, die höchsten und die niedrigsten, für je einen Abstand aufgenommen. Hier wurden für jede Schlagweite 10 Ablesungen gemacht. Beide Werte wurden als Schaulinien eingetragen (Abb. 38) und zeigen den großen Bereich des Unsicherheitsgebietes. Die Spannungen in den eben erwähnten Schaulinien stellen Höchstwerte dar, während alle folgenden Meßwerte anderer Aufnahmen auf Effektivwerte der Sinuskurve umgerechnet sind $\left(V_{1\,\text{eff.}} = \frac{V_{1\,\text{max}}}{\sqrt{2}}\right)$. Die vor-

stehenden Versuche zeigen, daß von einer sehr kleinen prozentualen Differenz abgesehen, die Kurvenform und damit auch das Vorschalten eines Wasserwiderstandes auf die Messungen mit dem Oszilloskop ohne Einfluß sind. Der Uebersehlag ist nur von dem Höchstwerte der Wechselspannung abhängig.

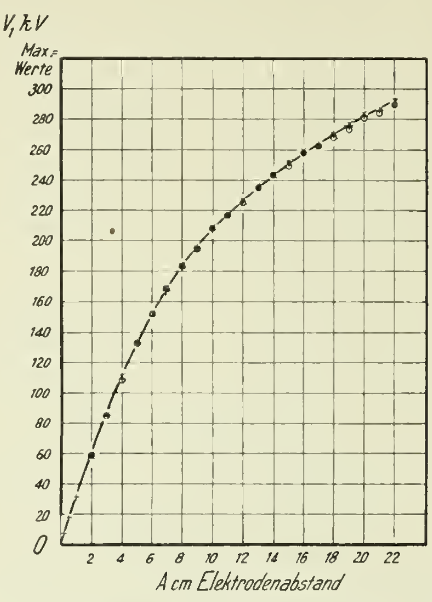


Abb. 37. Untersuchung des Einflusses der Kurvenform auf die Funkenspannung zwischen zwei 10,0 cm Dmr. Kugelelektroden.

● Maschine 31: Wasserwiderstand halb; × Maschine 31: Wasserwiderstand nahezu kurz;
\+ » 7: » » ; ○ » 7; » » ».

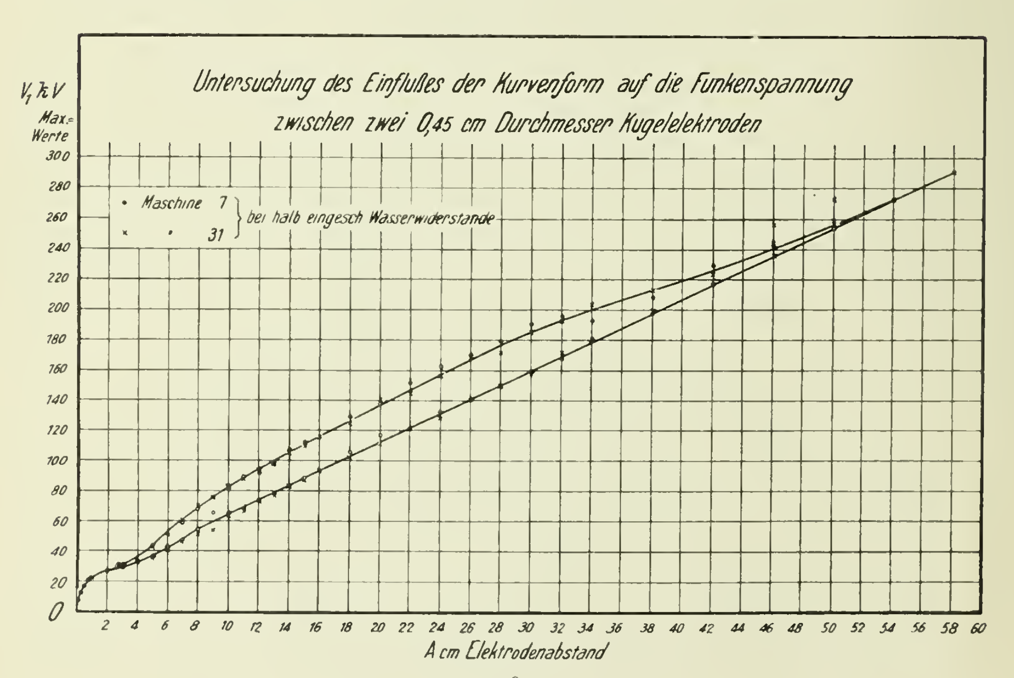


Abb. 38.

2) Die Funkenspannung für verschiedene Kugeldurchmesser und Elektrodenabstände.

Die im folgenden wiedergegebenen Zahlentafeln der Abhängigkeit der Funkenspannung von der Schlagweite für verschiedene Kugeldurchmesser gelten für die gleiche Anordnung und Schaltung, wie sie schon vorhin beschrieben wurde. Es wurde nur der Generator M 7 verwendet. Die Periodenzahl betrug 50. Abb. 39 zeigt die Schaltung des Transformators, des Oszilloskops und der Eicheinrichtung, Abb. 40 zeigt die Gesamtanordnung der Funkenstrecke nebst Zuleitungen.

Aus praktischen Gründen wurde auf die Aufhebung des Entladeverzuges durch künstliche Ionisatoren (ultraviolettes Licht) verzichtet.

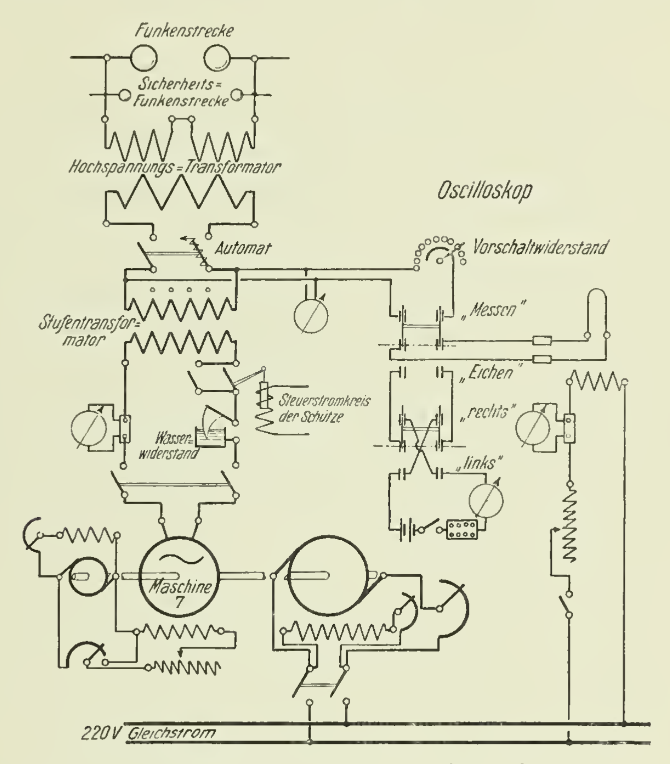


Abb. 39. Schaltschema für die Aufnahme der Funkenspannung.

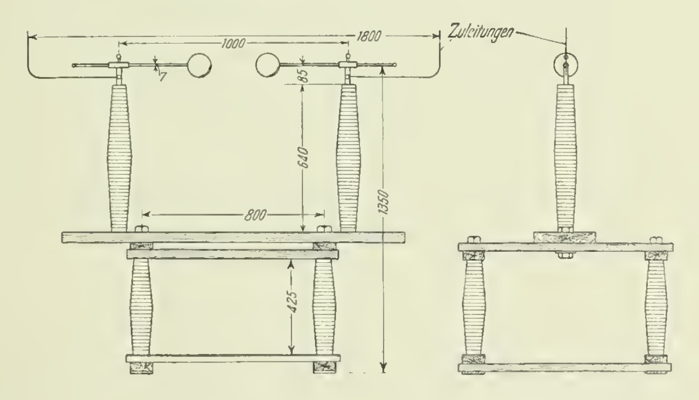


Abb. 40. Anordnung der Kugelfunkenstrecke.

Die erhaltenen Werte der Funkenspannung wurden auf den Barometerstand $b = 760$ mm und auf Zimmertemperatur von $t = 20^0$ C umgerechnet. Hierbei wurde zugrunde gelegt, daß die Funkenspannung für eine gegebene Schlagweite, solange sie identisch mit der Anfangsspannung ist, direkt proportional dem Luftdruck und umgekehrt proportional der absoluten Temperatur ist. D. h. ist V_1 die Spannung bei 760 mm und 20^0 C, so wäre für die gleiche Abmessung der Funkenstrecke, den Luftdruck b und die Temperatur t^0 C die Spannung V' nötig.

$$V' = V_1 \frac{b\,(273 + 20)}{760\,(273 + t)}.$$

Der Multiplikationsfaktor für die Reduktion der Funkenspannung auf 760 mm Hg und 20^0 C wird demnach:

$$f = \frac{760\,(273 + t)}{b\,(273 + 20)}.$$

Die eben genannten Berichtigungen gelten nur für dasjenige Gebiet, wo die Funkenspannung mit der Anfangsspannung zusammenfällt. Die Feuchtigkeit hat hier keinen Einfluß auf die Funkenspannung. Da im Gebiet der Glimm- und Büschelgrenzspannung umfangreiche Berichtigungen besonders für die prozentuale Luftfeuchtigkeit r erforderlich sind, so wurde versucht, diese Berichtigungen dadurch zu ersetzen, daß die sämtlichen Werte auf zwei verschiedene Weisen aufgenommen wurden. Einmal wurde die Abhängigkeit der Funkenspannung von der Schlagweite A für je einen Durchmesser an je einem Versuchstage ermittelt, so daß für diese Abhängigkeit $V_1 = f(A)$ gleiche Temperatur, Barometerstand und Feuchtigkeit gelten. Dann wurden an je einem Versuchstage die Funkenspannungen für alle verwendeten Durchmesser für je eine Schlagweite bestimmt. Die letztere Art der Aufnahme ergibt Punkte, die im Gebiet der Büschelgrenzspannung nicht genau auf einer Kurve liegen. Zieht man aber, vorausgesetzt, daß die mittlere Temperatur und Luftfeuchtigkeit sowie der Barometerstand um ein Mittel von $t = 20^0$, $r = 50$ vH und $b = 760$ mm schwanken, die Schwerpunktslinie durch die aufgetragenen Punktscharen, so wird mit ziemlicher Annäherung die erhaltene Kurve der reduzierten nahe kommen. In unserem Falle wurde auf die besagte Reduktion deshalb kein großer Wert gelegt, weil die Bestimmung der elektrischen Festigkeit der Luft nur für dasjenige Gebiet durchgeführt werden soll, wo die Anfangsspannung mit der Funkenspannung gleichbedeutend ist. Für dieses Gebiet ist allerdings die Reduktion nach der angegebenen Formel streng durchgeführt. Die Untersuchung hätte natürlich über den ganzen Umfang der Anfangsspannung ausgedehnt werden können, aber erfahrungsgemäß ist die Feststellung des ersten Leuchtens sehr vom Beobachter abhängig und hätte einen verdunkelten Raum erfordert, der seiner Zeit nicht zur Verfügung stand. Die Ergebnisse der Messungen sind in Zahlentafel 3 wiedergegeben und als Schaulinien in Abb. 41 aufgetragen. Diese Kurvenschar zeigt die Funkenspannung nur im Gebiete der Anfangsspannung, während Abb. 42 und Abb. 43 (Funkenspannung in Funktion vom Durchmesser für verschiedene Elektrodenentfernungen) auch den Verlauf der Funkenspannung im Gebiete der Glimm- und Büschelgrenzspannung zeigen. Die Messungen wurden ausgeführt für die Durchmesser

$D = 15,\ 10,\ 7{,}5,\ 5,\ 3{,}5,\ 2{,}15,\ 1{,}5,\ 1{,}0,\ 0{,}45,\ 0{,}3,\ 0{,}1$ cm.

Die Kurven $V_1 = f(A)$ weisen eine charakteristische Gestalt auf: anfänglich wächst die Spannung ziemlich steil und geradlinig mit der Schlagweite an, dann bildet sich ein »Knie« in der Kurve aus, und die Kurve steigt nun sanfter

Zahlentafel 3.

Effektivwerte der Funkenspannung zwischen Kugelelektroden verschiedenen Durchmessers bei verschiedenen Abständen. $b = 760$ mm. $t = 20^0$. A = Schlagweite in cm.

Kugel-dmr. *D* cm	0,1	0,3	0,6	0,8	1,1	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0	7,0	9,0	12,0	15,0	17,5	20,0	25,0	30,0	35,0	40,0	45,0
15,0	3,858	8,47	14,36	18,65	24,7	32,68	41,8	59,85	78,65	95,7	126,2	144,0	176,0	203,2	214,6	—	—	—	—	—	—
10,0	3,984	9,67	14,71	18,42	24,21	32,29	42,6	61,1	78,5	92,8	116,1	132,1	152,4	169,5	177,3	194,5	204,1	—	—	—	—
7,5	3,95	9,585	14,65	18,55	24,21	31,9	42,02	59,3	75,65	87,35	105,6	119,9	132,1	147,5	—	161	189,5	—	—	—	—
5,0	4,25	9,57	14,76	18,47	24,66	32,05	41,92	58,1	70,1	80,25	93,1	101,6	111,1	120,7	—	129,9	147,4	171,6	171,4	179,2	195,5
3,5	3,962	8,71	14,85	18,58	24,62	31,68	39,83	53,35	62,4	68,05	76,1	83,25	87,1	98,05	—	108,3	126,3	150,6	150,8	160,0	177,3
2,15	3,652	9,16	15,02	18,71	23,86	31,0	36,7	45,22	51,55	54,65	60,32	64,1	68,85	78,0	—	93,6	108,9	129,9	141,8	154,4	171,4
1,5	3,70	9,53	15,1	18,33	23,21	28,42	32,79	38,1	42,21	44,16	47,43	53,85 (51,0)	61,22	71,45	—	84,65	101,0	126,1	139,8	151,2	169,8
1,0	4,22	9,285	14,94	18,1	21,42	25,23	27,76	31,6	34,0	36,86	42,89	51,6	61,65	73,5	—	89,0	102,4	126,4	139,6	151,8	169,2
0,45	3,958	8,565	13,2	14,62	16,17	16,72	19,11	20,78	24,7	31,08	43,02	52,5	65,5	78,4	—	93,95	113,7	137,6	150,4	157,2	173,4
0,3	4,0	7,94	11,2	12,7	13,49	14,53	14,76	18,89	29,3	35,7	44,98	53,55	65,4	78,35	—	98,8	115,1	143,3	155,5	171,8	180,0
0,1	3,835	5,585	6,515	7,02	7,56	8,935	11,78	25,13	31,92	38,74	50,47	61,0	76,25	87,85	—	110,1	118,3	150,6	166,0	184,2	194,0

Zahlentafel 4.

Festigkeit der Luft in kV/cm (Effektivwerte) bei verschiedenen Kugeldurchmessern und Elektrodenabständen. $b = 760$ mm. $t = 20^0$. A = Schlagweite in cm.

Kugel-dmr. *D* cm	0,6	0,8	1,1	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0	7,0	9,0	12,0	15,0	17.5	20,0	25,0	30,0	35,0	40,0
15	—	—	—	—	—	—	21,07	22	23,1	22,02	23,07	23,58	22,95	—	—	—	—	—
10	—	—	—	—	—	22,1	23,75	24,5	24,95	24,3	24,4	24,9	24.64	25,87	25,72	—	—	—
7,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5,0	—	—	—	23,1	25	27,1	27,88	28,3	28	27,83	28	29,2	—	29,87	33.14	37,55	37,05	—
3,5	—	—	—	29	27,3	29,03	29,6	29,3	29,07	29,6	29,1	31,56	—	33,75	38,9	45,65	45,4	47,8
2,15	—	—	29,1	31	31	31,8	32,8	32,55	33,2	33,86	35,2	39,1	—	46,2	53,25	62,85	68,1	73,85
1,5	—	30,06	31,33	33,1	33,76	33,9	34,9	34,8	35,5	39,2	43,5	50,15	—	58,5	69,5	86	95	102,5
1,0	35,1	35,1	35,5	37,1	36,9	38	39	41,1	46,3	54,8	64,4	76,1	—	91,2	104,5	128,4	141,4	153,5
0,45	—	—	45,25	44,3	48,2	50,1	58,3	72,3	98,7	119,5	148,2	176,8	—	211	254,7	307,5	336	350,5
0,3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0,1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

mit der Schlagweite an. Sie geht alsdann in ein Unsicherheitsgebiet über, wo zu einer Schlagweite mehrere Spannungen gehören können und schließlich in das Gebiet der Büschelgrenzspannung. Uns berührt, wie schon bemerkt, in erster Linie das in Abb. 41 aufgetragene Gebiet der Anfangsspannung. Je größer der Kugeldurchmesser, um so länger dauert das proportionale Ansteigen mit dem Elektrodenabstande. Die Tangente im Nullpunkte an unsere Kurvenschar, welche punktiert eingezeichnet ist, zeigt uns das Verhalten von unendlich großen Kugeln, d. h. die Schlagweite zwischen ebenen Platten von außerordentlicher Ausdehnung.

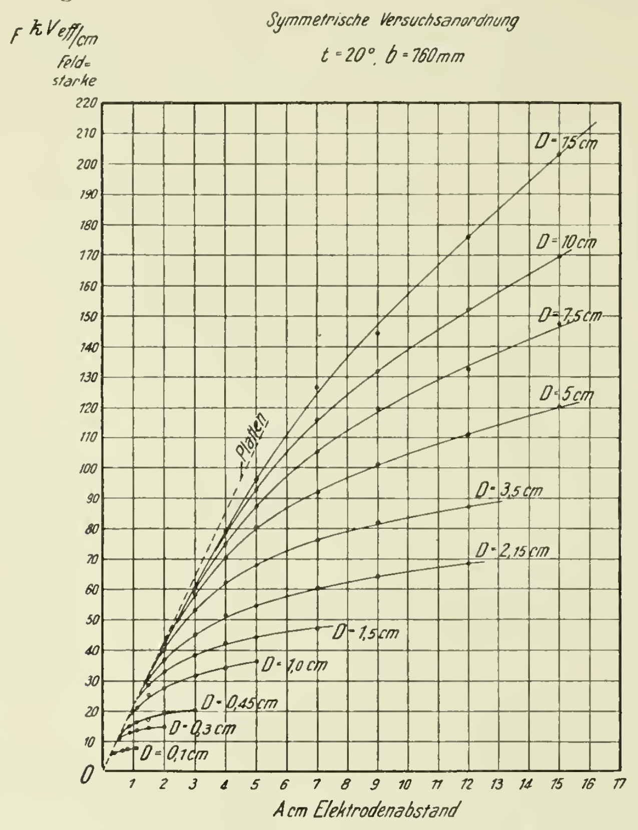


Abb. 41. Die Funkenspannung in Abhängigkeit vom Elektrodenabstand für verschiedene Kugeldurchmesser.

Wir hatten bei der Besprechung der Aufnahme der Potentialverteilung zwischen zwei Kugelelektroden im Elektrolyten erwähnt, daß gerade in dem Gebiete dicht an der Oberfläche der Elektroden, welches für den Durchbruch der Luft in Frage kommt, die Genauigkeit der Sondenmessung am geringsten ist. Wir hatten mit einer gewissen Annäherung gefunden, daß für dieses Gebiet dicht an der Kugeloberfläche die Störung durch die Zuleitungen verschwindend klein zu sein scheint. Wenn ein Einfluß sich geltend macht, so müßte er sich bei kleinen Elektroden in verstärktem Maße bemerkbar machen, und die Anfangsspannung zwischen kleinen Kugelelektroden von der Stärke der Zuleitung abhängen. In Abb. 44 wurden nun zwei Kugeln von 0,45 cm Dmr. einmal mit dünnen, das andere Mal mit dicken Schäften als Elektroden gewählt und die Abhängigkeit der Funkenspannung vom Elektrodenabstand festgestellt. Ein Unterschied der Spannungskurven im Gebiete der Anfangsspannung liegt nicht

vor, wohl aber treten Verschiedenheiten im Gebiete der Glimmgrenzspannung auf. Die dickschaftigen Kugeln entsprechen in der Feldverteilung etwas größeren Elektroden, dementsprechend sinkt hierbei auch die Funkenspannung, wie es die Kurventafeln Abb. 42 und Abb. 43 zeigen. Unterhalb eines Durchmessers von etwa 1 cm bedingt bei gleicher Schlagweite eine Vergrößerung der Kugeln ein Sinken der Funkenspannung, während bei größeren Durchmessern als 1 cm dem Anwachsen des Durchmessers auch ein Anwachsen der Funkenspannung entspricht. Aehnliche Erscheinungen beobachtet man bei der Zylinderfunkenstrecke: sie scheinen eng damit zusammenzuhängen, daß die scheinbaren Vergrößerungen

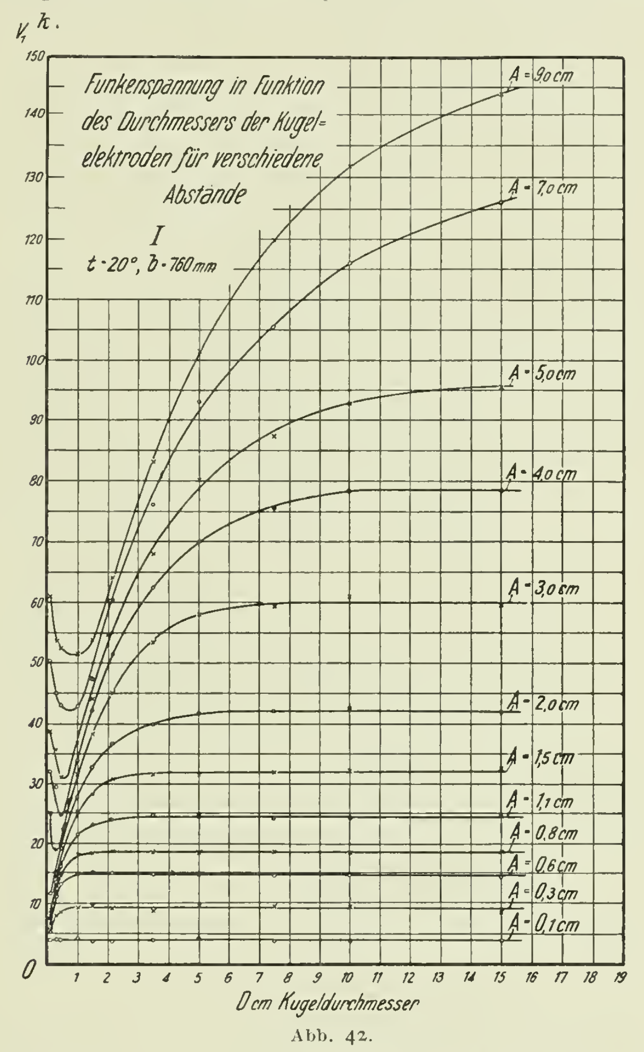


Abb. 42.

des Kugeldurchmessers einmal die Funkenspannung erhöhen, die scheinbare Verringerung der Elektrodenentfernung jedoch die Funkenspannung herabsetzt. Beide Einflüsse überschneiden sich und dürften für die Erforschung der Koronabildung von besonderer Bedeutung sein. In unserem Falle bedeutet die oben erwähnte Aufnahme eine Bestätigung unserer Annahme, daß die Art der Zuleitung für das Gebiet der Anfangsspannung keinen störenden Einfluß auf das Feld dicht an den Elektroden hat[1]).

[1]) Die Aenderung der Schaftstärke in den oben angegebenen Grenzen übt nach unseren Feststellungen keinen Einfluß auf die Anfangsspannung aus, wohl aber wird die Glimmgrenz-

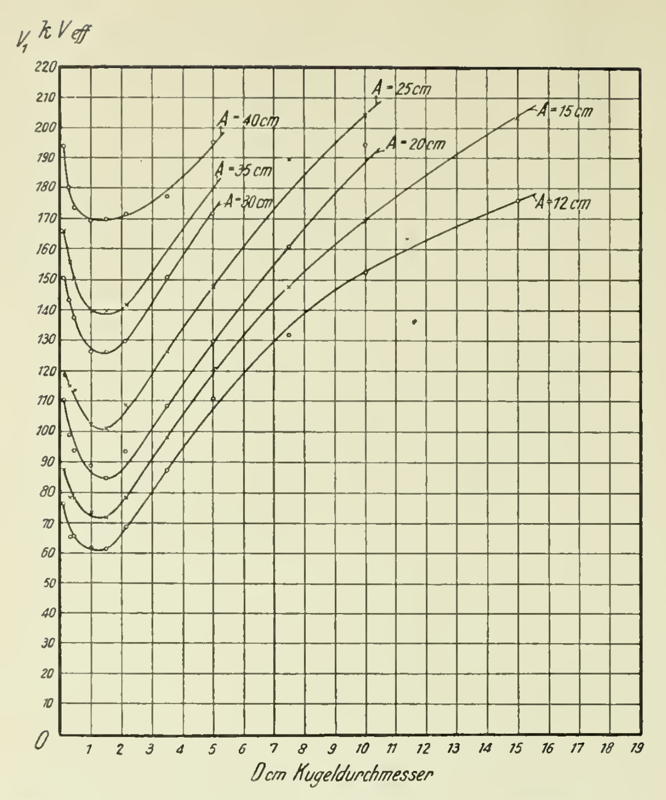
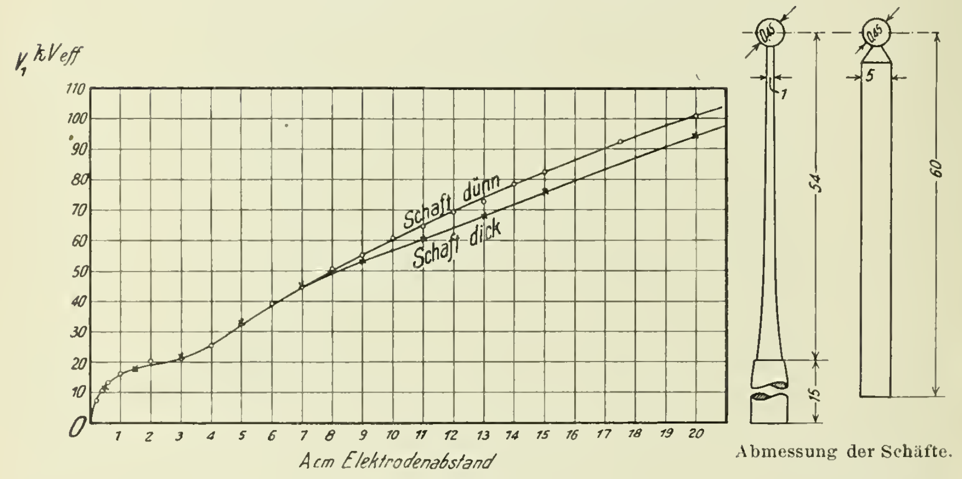


Abb. 43. Funkenspannung in Funktion des Durchmessers der Kugelelektroden für verschiedene Abstände. II. $t = 20^0$, $b = 760$ mm.



Abmessung der Schäfte.

Abb. 44. Die Beeinflussung der Funkenspannung zwischen 0,45 cm Dmr. Kugelelektroden durch die Abmessungen des Schaftes der Zuleitungen.

spannung stark beeinflußt. Gegen stärkere Veränderungen des Feldes ist die Anfangsspannung im allgemeinen sehr empfindlich, wie W. Weicker gezeigt hat W. brachte auf den Zuleitungen der Elektroden zwei runde Messingscheiben von 10 cm Dmr. und Stangen von 75 cm Länge, 5 mm Dmr. an, die bei Annäherung an die Elektroden (Kugeln von 1 bezw. 2 cm Dmr) eine wesentliche Heraufsetzung der Anfangsspannung bezw. Glimmgrenzspannung bewirkten. Die Büschelgrenzspannung hingegen erwies sich als fast völlig unabhängig von der Feldveränderung durch die verwendeten Scheiben oder Stangen.

B) Anwendung der Ergebnisse des Teiles I zur Berechnung der elektrischen Festigkeit der Luft und Berechnung der Funkenspannung.

1) Die Luftfestigkeit in Abhängigkeit vom Kugeldurchmesser.

Wenden wir die Ergebnisse des Abschnittes I auf die soeben ermittelten Funkenspannungen an, so können wir die Luftfestigkeit für verschiedene Kugeldurchmesser D in Abhängigkeit vom Abstande A auftragen. Wir benutzen hierzu die Kurventafel Abb. 6 oder Zahlentafel 1, um nicht die umständliche Formel der elektrischen Bilder (7) stets in die Rechnung einführen zu müssen.

Diese Kurven zeigen uns die Größe der Beanspruchung F, die an der Oberfläche der Kugeln herrscht, wenn wir einen Potentialunterschied von $V_1 = 100$ V zwischen beiden Elektroden annehmen.

Haben wir nun statt $V_1 = 100$ V die Funkenspannung V_x, so wird hierfür die Beanspruchung an der Kugeloberfläche:

$$F_x = \frac{F\,V_x}{V_1} = F\,\frac{V_x}{100}.$$

Die Zahlentafel 4 (S. 51), deren Werte in Kurventafel Abb. 45 aufgetragen sind, zeigt uns die auf obige Weise ermittelten Werte der Luftfestigkeit für alle verwendeten Durchmesser und Schlagweiten innerhalb des Bereiches der Anfangsspannung. Aus den Kurven ist ersichtlich, daß für jeden Kugeldurchmesser die Luftfestigkeit F in kV/cm einen anderen Wert hat, der sich aber in gewissen Grenzen als ziemlich unabhängig von der Schlagweite erweist. Man kann demnach die Abhängigkeit der elektrischen Festigkeit der Luft von dem Kugeldurchmesser ebenfalls als Schaulinie auftragen (Abb. 46).

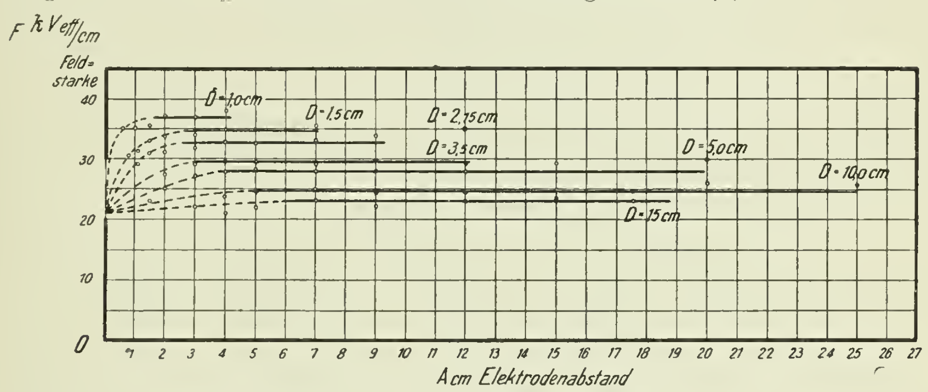


Abb. 45. Die Festigkeit der Luft an der Oberfläche von Kugelelektroden. Der vermutliche Verlauf der Kurven bei kleineren Werten von $\frac{A}{D}$ ist gestrichelt eingezeichnet. $t = 20^0$, $b = 760$ mm.

Es ergibt sich aus dieser Kurve die Möglichkeit einer Zurückrechnung der zum Zerstören der Luft notwendigen Funkenspannung, sobald der Durchmesser D und die Schlagweite A bekannt sind. Hierauf soll erst im folgenden näher eingegangen werden.

Merkwürdig erscheint auf den ersten Blick die verschiedene Größe der Luftfestigkeit F bei verschiedenem Durchmesser der Kugeln. Wir gehen davon aus, daß die Zerstörung der Luft einen Ionisationsvorgang darstellt. Die Geschwindigkeit, mit der die Elektronen von der einen zur anderen Elektrode fliegen, ist abhängig von der treibenden Feldstärke. Betrachten wir zwei ebene

parallele Platten in Luft, die wir an eine Gleichstromquelle von veränderbarer Spannung legen, so fangen die im Luftraume vorhandenen und dauernd aus radioaktiven Substanzen der Erde neu erzeugten Ionen an zu wandern, und da jedes Ion eine kleine elektrische Ladung mit sich führt, so beginnt ein Strom in dem Kreise zu fließen. Ist das Feld noch klein, so werden nur wenige Ionen mit geringer Geschwindigkeit übertreten und ein dementsprechend kleiner Strom in dem Stromkreise fließen. Erhöhen wir die Spannung allmählich, so erhalten wir die folgende wesentliche Abhängigkeit des Stromes von dem Potentialunterschied zwischen den Platten (Abb. 47): es wächst der Strom mit der Spannung erst proportional, dann allmählicher an und bei einer bestimmten Spannung bildet sich der Sättigungsstrom aus, der bei der Erhöhung der Spannung bis zu einer gewissen Grenze unverändert bleibt; d. h. die Zahl der neu zugeführten Ionen ist im Gleichgewicht mit der Zahl derjenigen, die ihre Ladung durch Auftreffen auf die entgegengesetzte Elektrode abgaben.

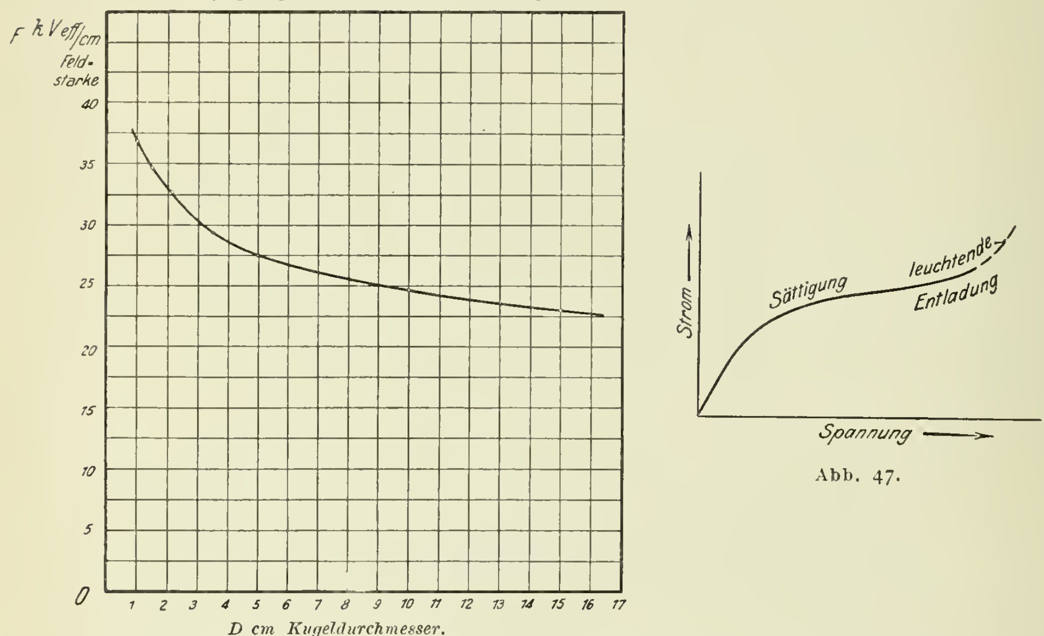


Abb. 47.

Abb. 46. Die Festigkeit der Luft an der Oberfläche von Kugelelektroden in Abhängigkeit vom Kugeldurchmesser. Symmetrische Versuchsanordnung. $t = 20^0$, $b = 760$ mm.

Erhöhen wir die Spannung über diese Grenze hinaus, so tritt die Stoßionisation ein, d. h. die Geschwindigkeit der Elektronen wird so groß, daß die auf ein Luftmolekül auftreffenden Elektronen es zertrümmern und in ein oder mehrere Elektronen und ein positives Ion zerspalten. Auf diese Weise wird die Zahl der mit großer Geschwindigkeit wandernden Ionen außerordentlich stark vermehrt, so daß schließlich der Luftraum leitend wird und ein Funke übergehen kann. Diese Betrachtung gilt für ein vollkommen homogenes Feld, d. h. ein Kraftlinienbild, in dem alle Kraftlinien parallel laufen und überall die gleiche Dichte haben.

Tragen wir dagegen unser Feld zwischen Kugelelektroden im Augenblick des Funkenüberganges auf, so erhalten wir ein völlig anderes Bild. Da es nicht auf die genaue Wiedergabe der Form des Feldes in diesem Falle ankommt, so zeichnen wir zwei Bilder der Feldverteilung zwischen Kugeln, wie sie die einfachere Formel (10) ergibt (Abb. 48). Beide Bilder gelten für den gleichen Abstand

$A = 15$ cm und die Durchmesser 10 cm und 1 cm. Wir erkennen, daß bei den größeren Kugeln das Feld ersichtlich viel gleichmäßiger als im zweiten Falle gebildet ist. Die Geschwindigkeit eines Elektrons — die positiven Ionen werden wegen ihrer größeren Masse nicht bis zur Ionisierungsgeschwindigkeit beschleunigt — nimmt nach der Mitte des Raumes hin im zweiten Falle bedeutend stärker ab. In diesem Falle ist die Möglichkeit der Wiedervereinigung der positiven und negativen Ionen zu neutralen Luftmolekülen bedeutend größer als bei der

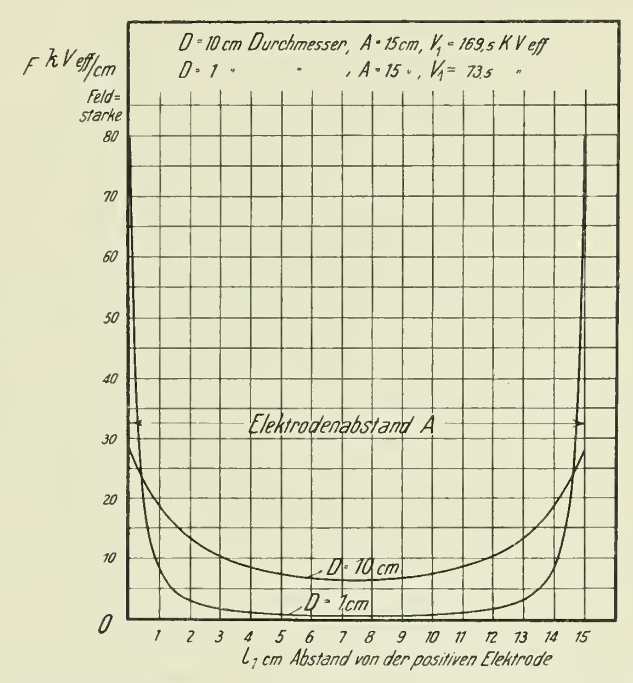


Abb. 48. Die Feldverteilung zwischen 10 cm und 1 cm Kugelelektroden beim Funkenübergang über gleiche Elektrodenabstände, wenn angenommen wird, daß die Büschelstrahlung bei den kleineren Elektroden keinen Einfluß auf die Verteilung des Feldes hat.

höheren Feldstärke im ersten Falle. Gehen aber bei den kleineren Kugeln mehr Ionen durch die Wiedervereinigung verloren als bei den größeren, so muß bei den kleineren Kugeln eine größere Gesamtzahl von Ionen aufgebracht werden, um die gleiche Ionisation für den gleich großen Luftraum hervorzurufen. Die zum Ueberschlag führende Feldstärke müßte nach den obigen Betrachtungen bei den kleineren Kugeln größer ausfallen, als bei den größeren Kugeln, und dies ist tatsächlich der Fall.

Kuhlmann vertritt die Ansicht, daß bei gleichem Abstande der beiden Kugelpaare bei den größeren Kugeln wie bei den kleineren die gleiche Anzahl Ionen zur Ionisierung des Luftraumes zwischen den Kugeln notwendig ist. Die Oberfläche der kleineren Kugeln muß dann unter der Einwirkung eines weit stärkeren Feldes stehen, um die gleiche Anzahl Ionen wie die große Kugeloberfläche in den Luftraum senden zu können.

Es scheint nicht ausgeschlossen zu sein, daß auf Grund eingehender Rechnungen, die sich auf der Ionentheorie aufbauen, eine theoretische Ableitung der Abhängigkeit der Luftfestigkeit vom Kugeldurchmesser gefunden werden kann.

2) Berechnung der Funkenspannung aus der Luftfestigkeit und den geometrischen Abmessungen der Kugelfunkenstrecke.

Legen wir die im vorigen Abschnitt gefundenen Werte der Luftfestigkeit für die verschiedenen Kugeldurchmesser unserer Rechnung zu Grunde, so können wir ohne weiteres aus der Formel (7)

$$F = \frac{V_1}{D}\left[1 + \frac{(c^2-1) - c + (c^2-1)\,c}{(c-1)^2\,(c^2-1-c)} + \frac{c\,(c^2-1)}{(c^2-1-c)^3}\right]$$

bezw.

$$V_1 = \frac{F\,D}{1 + \frac{(c^2-1) - c + (c^2-1)\,c}{(c-1)^2\,(c^2-1-c)} + \frac{c\,(c^2-1)}{(c^2-1-c)^3}}$$

die Funkenspannung zurückrechnen.

Diese Formel eignet sich schlecht für praktische Berechnungen, wir verwenden daher die Formel (11) und (12):

$$F = \frac{V_1}{k}\,\frac{A+D}{A\,D} \quad \text{oder} \quad V_1 = k\,F\,\frac{A\,D}{A+D}.$$

Die Werte von F entnehmen wir der Schaulinie $F = f(D)$, Abb. 46.

Die Berechnung der Spannung sei an einem Beispiel durchgeführt. Es sei:

1) $D = 5$ cm, $A = 10$ cm.

Wie groß ist die Funkenspannung zwischen den beiden Kugeln?

Wir finden die Luftfestigkeit für den Durchmesser $D = 5$ cm in Abb. 46 $F = 28$ kV/cm.

Für $\frac{A}{D} = {}^{10}/_{5} = 2$ wird der Berichtigungswert $k = 1{,}121$.

Dann wird:

$$V_1 = kF\,\frac{A\,D}{A+D} = 1{,}121 \cdot 27{,}6 \cdot \frac{10 \cdot 5}{10+5}.$$

Die gesuchte Funkenspannung wird dann $V_1 = 103{,}1$ kV. In unsern Kurven Abb. 41 finden wir den durch Versuch ermittelten Wert zu:

$$V_1 = 104{,}7 \text{ kV};$$

dies entspricht einem Fehler von — 1,5 vH.

2) Ferner soll für die Abmessungen $A = 3{,}0$ cm und $D = 1$ cm Dmr. die Funkenspannung gesucht werden. Es ist in der Kurve Abb. 46 hierfür zu finden $F = 36{,}9$ kV/cm; $\frac{A}{D} = 3{,}0$, $k = 1{,}1015$.

Demnach wird:

$$V_1 = 1{,}1015 \cdot 36{,}9 \cdot {}^{3}/_{4} = 30{,}5 \text{ kV}.$$

Die experimentell ermittelten Kurven ergaben:

$$V_1 = 31{,}5 \text{ kV},$$

also eine Abweichung von — 3,17 vH.

Die vorstehenden Rechnungen beziehen sich lediglich auf das Gebiet der Anfangsspannung, soweit es mit der Funkenspannung zusammenfällt. Das weitere Gebiet der Anfangsspannung wurde bei den vorliegenden Aufnahmen nicht untersucht. Hierzu wurden die Versuchsergebnisse von Weicker (Hermsdorf) herangezogen, der die Anfangsspannung auch bei größeren Schlagweiten im verdunkelten Raum beobachtete. Die Schaulinien Abb. 49 zeigen die Abhängigkeit der dazugehörigen Beanspruchungen an der Kugeloberfläche von der Elektrodenentfernung, die nach unserem obigen Verfahren berechnet wurden. Hieraus

ist ersichtlich, daß für den weiteren Verlauf der Anfangsspannung die Festigkeit der Luft allmählich höhere Werte annimmt. Es mag dies zum Teil an der Beobachtung durch das Auge liegen, denn tatsächlich können wir mit dem Auge nur das Einsetzen des leuchtenden Glimmens beobachten, während die unsichtbare Strahlung, deren Vorhandensein von Whitehead[1]) auf photographischem Wege unter Verwendung einer Quarzlinse nachgewiesen werden konnte, schon bei niedrigeren Spannungen einsetzt.

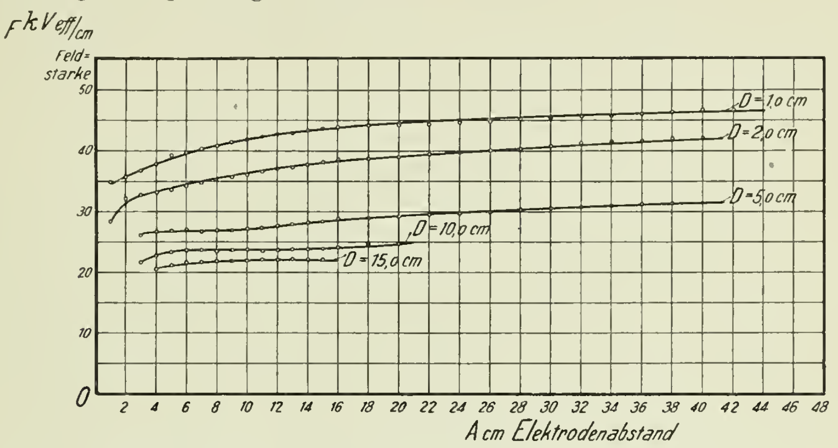


Abb. 49. Beanspruchung der Luft an der Oberfläche der Kugeln bei der Anfangsspannung. Aufnahmen nach W. Weicker. $t = 20^0$, $b = 740$ mm, $r = 50$ vH.

Der Anwendungsbereich unserer Formel wird sich schon mit Rücksicht auf das nur im verdunkelten Raum zu beobachtende erste Glimmen, ferner auf das eben erwähnte Zunehmen der elektrischen Festigkeit der Luft bei größeren Verhältnissen von $\frac{A}{D}$ auf dasjenige Gebiet beschränken müssen, wo Anfangs- und Funkenspannung gleichbedeutend sind. Nach den Weickerschen Versuchen hört die Funkenspannung bei Kugeln von 1 und 2 cm Dmr. bei einem Verhältnis $\frac{A}{D} = 6$ auf, mit der Anfangsspannung zusammenzufallen, bei Kugeln von 5 cm Dmr. schon bei einem Verhältnis von $\frac{A}{D} = 4$.

Nehmen wir sicherheitshalber diesen letzteren Wert $\frac{A}{D} = 4$ als obere Grenze an, so dürfen wir also bei kleineren Kugeln bis zu Schlagweiten vom vierfachen Durchmesser die beobachteten Funkenspannungen nach unserer Formel berechnen. Was die untere Grenze des Anwendungsbereiches unserer Formel (11) $V_1 = kF\frac{AD}{A+D}$ anbelangt, so scheinen die Kurven der Luftfestigkeit für alle Kugeldurchmesser für die kleinsten Schlagweiten auf einen bestimmten Wert herabzugehen, der bei etwa 21 kV/cm liegt. Es wäre hiermit gesagt, daß sich das Feld zwischen Kugelelektroden von geringem Abstande dem homogenen Felde von planparallelen Platten nähert. Betrachten wir die Kurventafel Abb. 41, wo die Funkenspannungen als Funktion der Schlagweite für verschiedene Kugeldurchmesser aufgetragen sind, oder Abb. 42, so können wir feststellen, daß der Verlauf sämtlicher Kurven bei den kleinsten Schlagweiten genau der gleiche ist. Die Kurven nehmen hier den gleichen Verlauf, wie ihn die Funkenspannung zwischen zwei planparallelen Plattenelektroden nehmen würde. Während

[1]) Proceedings of the A. J. of E. E. Juni 1912. (E. T. Z. 1913 Heft 16.)

bei etwas größeren Schlagweiten nur die Kurven für die größeren Kugeln noch eine Proportionalität zwischen Funkenspannung und Schlagweite beibehalten, um dann bei noch grösserer Schlagweite ihren ausgeprägten Verlauf zu nehmen, würde diese Proportionalität für Platten, die man als unendlich große Kugeln auffassen kann, auch für größere Elektrodenabstände gelten. Die Luftfestigkeit dürfte bei Platten einen bestimmten festen Wert, der unabhängig von der Plattenentfernung ist, annehmen. Die Funkenspannung zwischen Platten ist gegeben durch die Tangente an unserer Kurvenschar $V_1 = f(A)$ im Nullpunkt (Abb. 41). Die Festigkeit der Luft beträgt hiernach für Platten 21,5 kV/cm, bei den Weickerschen Kurven 21 kV/cm, dies ist der gleiche Wert, den Petersen mit der Zylinderfunkenstrecke als untersten Wert der Luftfestigkeit ermittelte.

Der Verlauf der Funkenspannung in Funktion der Schlagweite ist bei den größeren Kugeln von 15 und 10 cm Dmr. bis zur Elektrodenentfernung von 1 cm derselbe wie bei unendlich großen Kugeln. Man wird deshalb für die Messungen von Spannungen bis herauf zu etwa 21 kV mit Vorteil Kugeln von diesem Durchmesser als Meßfunkenstrecke anwenden können. Es müßte allerdings, wie später gezeigt wird, die Funkenstrecke durch künstliche Ionisatoren beeinflußt werden. Man würde bei dieser Anordnung die Randwirkung von planparallelen Platten umgehen können, die oft auch noch störend wirkt, wenn die Plattenränder umgebördelt sind. Allerdings ist die Kapazität dieser Anordnung ziemlich groß, wie aus den Kapazitätsrechnungen in Abschnitt I erkenntlich ist. Man kann bei dieser Funkenstrecke Proportionalität zwischen Spannung V_1 und Schlagweite A voraussetzen und die Spannung nach der Gleichung $V_1 = (21\,A)$ kV berechnen.

Unsere sämtlichen Messungen der Funkenspannungen wurden, wie schon erwähnt, ohne künstliche Ionisation des Luftraumes der Funkenstrecke durchgeführt. Infolgedessen tritt bei den kleinsten untersuchten Schlagweiten von 0,1 bis rd 2 cm die Erscheinung des Entladeverzuges in unseren Kurven deutlich zum Vorschein. So beträgt bei 0,1 cm Schlagweite die Funkenspannung nicht 2,1 kV sondern 4,0 kV_{eff}. Der Entladeverzug erklärt sich aus dem Mangel an freien Ionen in dem zu durchbrechenden Luftraum und könnte durch Bestrahlung mit dem ultravioletten Lichte einer offen brennenden Bogenlampe vermieden werden. Bei größeren Schlagweiten wird die Anfangsspannung — bei Glimm- und Büschelgrenzspannung tritt kein Entladeverzug mehr ein — wie auch Weicker gezeigt hat, nur unwesentlich durch Bestrahlung herabgesetzt. Will man also für die kleineren Elektrodenentfernungen ein homogenes Feld annehmen und mit einer Durchbruchspannung von 21 kV/cm rechnen, ist stets künstliche Ionisation erforderlich.

C) Die Strahlungserscheinungen an Kugelelektroden im Gebiet der Glimm- und Büschelgrenzspannung.

1) Strahlungen an verschieden großen Kugelelektroden.

In den vorigen Ausführungen wurde die Berechnung der Funkenspannung nur für das Gebiet der Anfangsspannung durchgeführt. Die Kurventafeln Abb. 42 und Abb. 43 zeigen die Funkenspannung in Funktion vom Kugeldurchmesser für verschiedene Schlagweiten. Würde man statt dessen die Funkenspannung in Funktion von der Schlagweite auftragen, so fände man, daß die Funkenspannung für einen gewissen Bereich bald mit der Glimmgrenzspannung, bald mit der Büschelgrenzspannung gleichartig ist, so daß ein verwaschenes Uebergangs-

gebiet entsteht. Bei unseren Aufnahmen wurde nur die obere Grenze dieses Uebergangsgebietes wiedergegeben. Sie ließ sich durch vorsichtiges, langsames Heraufregeln der Spannung erhalten. Was das verwaschene Uebergangsgebiet angeht, so hat schon Toepler gezeigt, daß bei jedem Uebergang einer Entladungsform in eine andere, Funkenbildung auftreten kann. Für Spannungsmessungen ist dieses Uebergangsgebiet zu unsicher, trotzdem es, wie bemerkt, gelingt, die obere Grenze des Gebietes zu erhalten. Für Meßzwecke kommt erst derjenige Bereich wieder in Betracht, wo die Funkenspannung nur als Büschelgrenzspannung auftritt. Die Abhängigkeit der Funkenspannung vom Abstande ist hier linear.

Die Funkenspannung wächst in diesem Gebiete wieder stärker mit der Elektrodenentfernung an als im letzten Bereich der Anfangsspannung. Nimmt man an, daß die leuchtenden Luftschichten, die in diesem Gebiete die Elektroden umgeben, eine gute Leitfähigkeit besitzen, so müßte das ganze Bild der Feldverteilung gegenüber dem Bilde, welches uns die Rechnung verschafft, einschneidend verändert werden. Der Verfasser versuchte an Hand einer größeren Anzahl von photographischen Aufnahmen, denen verschiedene Kugelgrößen und Elektrodenentfernungen zu Grunde gelegt wurden, eine Gesetzmäßigkeit in der Bildung dieser leuchtenden Hüllen festzustellen.

Es wurde zu diesem Zweck erst das Kugelpaar bei Belichtung durch einen Scheinwerfer photographiert und dann bei verdunkeltem Raum eine Spannung V_1 an die Elektroden gelegt, die nur etwas geringer war als die vorher aus mehreren Messungen im Mittel bestimmte Funkenspannung $V_{ü}$. Auf diese Weise gelang es, in der Mehrzahl der Fälle Photogramme der leuchtenden Hüllen aufzunehmen. Setzte dagegen ein unvorhergesehener Funkenübergang ein, so trat die selbsttätige Abschaltung des Transformators sofort in Tätigkeit. Eine Beichtung von etwa 2 min reichte bei voller Objektivöffnung $F:6,3$ aus, um die Koronabildung an den Kugeln auf der Platte festzuhalten.

Die Art der Leuchterscheinung erwies sich erstmals im hohen Grade vom Kugeldurchmesser, aber auch in einigen Fällen von der Elektrodenentfernung abhängig. Es wurden Photogramme der Koronastrahlung bei Kugeln von $D = 3,5$, 2,15, 1,0, 0,45, 0,1 cm Dmr. und von Spitzen mit 17° Oeffnungswinkel aufgenommen (P 1 bis P 7). Eine Gesetzmäßigkeit der Ausdehnung der strahlenden Hülle konnte an Hand der Feldgleichungen des Abschnittes I nicht ermittelt werden, abgesehen davon, daß die Strahlung das Feld gegenüber der Rechnung sicher stark verändert. Dagegen scheint die Größe der Strahlung für einen gegebenen Kugeldurchmesser von einem gewissen Kugelabstand ab gerechnet, unabhängig von der Elektrodenentfernung und damit von der Spannung zu sein. Die strahlende Hülle scheint dagegen mit der Größe der Kugeln zu wachsen. Bei allen Aufnahmen sind die Spannungen stets etwas kleiner als die betreffenden Funkenspannungen gewählt worden. Eine genaue Wiedergabe der Strahlungserscheinungen im Augenblick des Funkenausbruches läßt sich nicht erzielen, da die Entladung oft unvermittelt bei kleineren Spannungen einsetzte und die betreffende Aufnahme entwertete.

2) Stroboskopische Aufnahme der Strahlungserscheinungen.

Um das Verhalten der Strahlung in nur einer Stromrichtung beobachten und aufnehmen zu können, wurde vor das Objektiv des photographischen Apparates eine stroboskopische Scheibe gebracht, die von einem Synchronmotor unter Verwendung des gleichen Wechselstromes, der den Transformator speiste, ge-

dreht wurde. Es konnten hiermit die Strahlungen an Anode und Kathode aufgenommen werden, während bei den früheren Photogrammen sich zwei Bilder überlagerten, da jede Elektrode während einer Aufnahme abwechselnd Kathode und Anode darstellte. Ueber den Stufen-Spartransformator (Abb. 36) konnte dem Synchronmotor stets eine einigermaßen konstante Spannung zugeführt werden. Die Polarität des aufgenommenen Photogrammes wurde mit Hülfe einer kleinen Wechselstrombogenlampe ermittelt. Diese Lampe trug eine Mattglasglocke, deren obere Hälfte heller als die untere erschien, wenn die untere Kohle positiv und die obere negativ war. Der positive Krater wirft in diesem Falle sein Licht auf die obere Glockenhälfte. Während der Bestimmung der Polarität der Elektroden nach der photographischen Aufnahme mußte die Scheibe weiterlaufen. Dann wurde der Haupttransformator abgeschaltet und die Bogenlampe an die Sekundärklemmen des in Schaltschema Abb. 36 ersichtlichen Stufentransformators gelegt, dem eine passende Spannung entnommen wurde. Bei diesen Versuchen mußte der vorgeschaltete Wasserwiderstand kurz geschlossen werden, um die Spannungskurve nicht allzu sehr abzuflachen.

Bei der Wahl der Schlitzbreite der stroboskopischen Scheibe wurde dafür gesorgt, daß möglichst die gesamte Leuchterscheinung des in Betracht kommenden Wechsels auf der Platte aufgefangen wurde. Bei dieser Gelegenheit wurde auch ein Verfahren gefunden, die Erstreckung der Funkenbildung über einen Wechsel festzustellen. Es wurde eine Scheibe mit schmalem Schlitz verwendet, auf synchrone Umlaufzahl gebracht und bei sonst verdunkeltem Raum durch die Funken einer Spitzenfunkenstrecke von $A = 15{,}2$ cm Schlagweite beleuchtet. Der weiße Hintergrund leuchtete dann zu den bestimmten Zeiten, wo er durch die Funken erhellt wurde, durch die sich drehende Scheibe hindurch, und die Breite des erscheinenden hellen Ausschnittes konnte von Bogengraden umgerechnet in die gleichzeitig aufgenommenen Oszillogramme eingetragen werden. Die Funkenoszillogramme zeigen einseitigen und zweiseitigen Funkenübergang (Abb. 50). Der einseitige Funkenübergang erklärt sich durch die Unsymmetrie der Amplituden der Spannungskurve und geht bei Erhöhen der Spannung in den beiderseitigen über. Auf unserem Photogramm der stroboskopischen Scheibe (Abb. 51) ist sowohl die Schlitzbreite als auch der Augenblick der verschiedenen

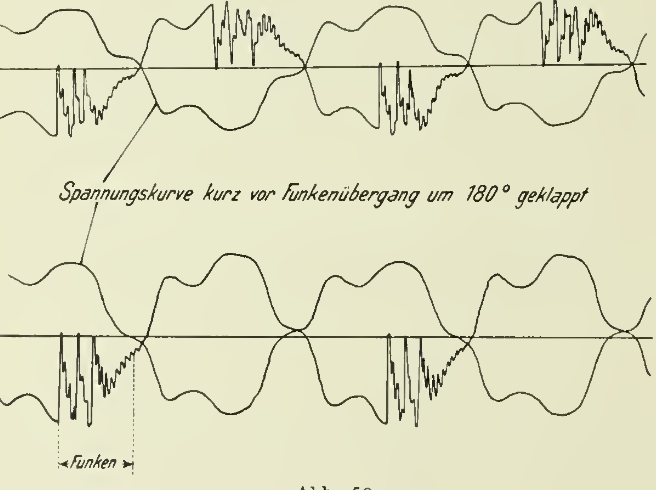


Abb. 50.

Funkenübergänge deutlich erkennbar. Die Schlitzbreite der zur Aufnahme der Koronabildung verwendeten Scheibe wurde gleich der Breite des leuchtend erscheinenden Sektors der Scheibe mit schmalem Schlitze gewählt.

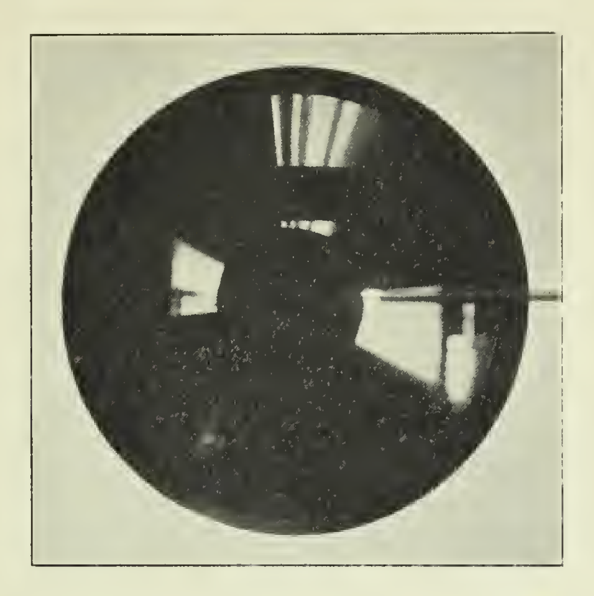


Abb. 51. Die Stroboskopscheibe bei Funkenübergang.

Die Photogramme der Strahlung von Kugelelektroden unter Benutzung der stroboskopischen Scheibe zeigen ein wesentlich anderes Aussehen als die früher aufgenommenen. Die Kathode zeigt eine nur kleine leuchtende Hülle, während die Anode eine wesentlich größere Leuchterscheinung erkennen läßt. Als Beispiel einer solchen Aufnahme ist das Photogramm P 8 beigefügt.

Es erscheint ausgeschlossen, daß man unter der Annahme, diese leuchtenden Hüllen kämen einer Veränderung der Elektrodengestalt gleich, die Abhängigkeit der Funkenspannung vom Abstande der Kugeln berechnen kann. Die Leuchterscheinung hat keine mathematisch einfach darstellbare Form und bildet insbesondere für den Augenschein weniger eine Hülle, als ein dauernd in Bewegung befindliches Strahlenbüschel. So wurden bei der Aufnahme der Photogramme P 2 bis P 5 meist zwei Strahlenbüschel beobachtet, die, einander gegenüberstehend, bald in der einen, bald in der anderen Richtung sich bewegend, die merkwürdigen auf der photographischen Platte sichtbaren Umdrehungskörper ergaben.

Zusammenfassung und Schluß.

Fassen wir die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zum Schlusse zusammen, so finden wir, daß die Ladungen zweier Kugeln auf Punktladungen durch Annahme von elektrischen Bildern zurückgeführt wurden. Es wurde hierdurch ermöglicht, das Spannungsgefälle sowohl an der Oberfläche, als auch in jedem Punkte der Mittellinie beider Kugeln zu berechnen. Eine Formel für die Kapazität des Kondensators aus zwei gegenüberstehenden Kugeln wurde angegeben. Es wurde ferner eine Formel für die Potentialverteilung auf der Mittellinie gegeben. Die Feldstärke an der Kugeloberfläche wurde in Zahlen-

tafeln und in Kurvenform unter Annahme einer Spannung von $V_1 = 100$ Volt für die verschiedenen Durchmesser und Elektrodenentfernungen aufgetragen. Es wurde fernerhin unter vereinfachenden Annahmen ein zweites einfacheres Verfahren angegeben, um das Spannungsgefälle und die Verteilung des Potentials zwischen den beiden Kugelelektroden zu bestimmen. Für den Wert der Feldstärke an der Kugeloberfläche wurde ein Berichtigungsfaktor k angegeben, der dieser Formel die gleiche Genauigkeit verleiht, wie sie die zuerst angegebene aufweist.

Es wurde des weiteren angenommen, daß die Verteilung der Stromfäden in Leitungsröhren in einem Elektrolyten ganz ähnlich dem Kraftlinienbilde zweier geladener Leiter im Dielektrikum sein muß, und es wurde mittels einer Sonde die Potentialverteilung zwischen den Kugeln untersucht. Dieses Verfahren erlaubte nicht allein eine Nachprüfung der Rechnungsergebnisse, sondern auch eine Bestimmung des störenden Einflusses der Zuleitungen zu den Elektroden. Es wurden Aufnahmen der Potentialverteilung zwischen Kugeln mit verschieden langen Zuleitungen von einer Stärke von 7 mm Dmr. ausgeführt.

Ausgehend von der Erkenntnis, daß ein enger Zusammenhang zwischen dem dielektrischen Widerstand und der Kapazität besteht, wurde Gleichartigkeit der Widerstandsverhältnisse im Dielektrikum und Elektrolyten vorausgesetzt und eine Kapazitätsbestimmung auf Grund von Widerstandsmessungen durchgeführt. Die durch den Versuch gefundenen Kurven wurden den errechneten gegenübergestellt, um namentlich für die kleineren Abstände die Formelergebnisse berichtigen zu können. Bei den Widerstandsmessungen wurde vergleichsweise eine größere und eine kleinere Wanne als Behälter für den Elektrolyten gewählt und der Einfluß der endlichen Größe der Wanne gezeigt.

Die Rechnungs- und Messungsergebnisse sind im zweiten Teile dieser Arbeit auf Hochspannungsmessungen des Funkenüberganges zwischen Kugelelektroden angewendet worden.

Die Versuchseinrichtung zeigte ein Oszilloskop, ein optisches Meßgerät, ähnlich dem Oszillographen, das eine Beobachtung der größten Spannungsausschläge ermöglichte. Die Messungen wurden in Ermangelung anderer technischer Einrichtungen unterspannungsseitig vorgenommen. Die Versuchswerte sind auf die Effektivwerte der reinen Sinuskurve umgerechnet, die Periodenzahl betrug 50. Es wurde an Hand dieser Werte die Größe der Luftfestigkeit für verschiedene Kugeldurchmesser bestimmt, so daß an Hand der vereinfachten Formel, des Berichtigungsfaktors und der soeben angegebenen Luftfestigkeit die Ueberschlagsspannung leicht zurückgerechnet werden kann. Ueber den Geltungsbereich der Formel wurden bestimmte Angaben gemacht.

Es wurde ferner auf das Gebiet der Büschelgrenzspannung eingegangen und an Photogrammen die Eigentümlichkeit der Büschel- und Glimmstrahlungen bei höheren Wechselspannungen gezeigt. Zur Beurteilung der Strahlungsverhältnisse in nur einer Stromrichtung wurde eine stroboskopische Aufnahme beigefügt. Eine theoretische Behandlung der Funkenspannung im Gebiet der Büschelgrenzspannung unter Benutzung der im Teil I angegebenen Feldgleichungen erscheint dagegen wegen der Unsymmetrie und Ungleichförmigkeit der Strahlungserscheinungen als nicht möglich.

Der Grundgedanke der vorliegenden Arbeit läßt sich nach den vorstehenden Ausführungen zusammenfassen in die eine Aufgabe: Ermittlung der Funkenspannung zwischen zwei Kugelelektroden, wenn deren Durchmesser und Abstand gegeben und die Abhängigkeit der Luftfestigkeit vom Kugeldurchmesser bekannt ist.

Zum Schlusse sei noch darauf hingewiesen, daß sich die Kapazitätsbestimmung aus Widerstandsmessungen nicht auf das oben beschriebene Gebiet beschränkt. Es kann durch geeignete Schaltung der einen Kugel ein höheres, der anderen Kugel ein niedrigeres Potential oder z. B. auch das Potential o aufgedrückt werden, wenn man eine hinreichend große leitende Wanne verwendet und diese über Widerstände oder unmittelbar mit der einen Elektrode verbindet. Es läßt sich der Einfluß in der Nähe befindlicher Leiter und Dielektrika bestimmen, indem man für die Leiter Metall und die Dielektrika Stoffe verwendet, die ε mal so gut wie der Elektrolyt leiten. Das Verfahren gilt allgemein für jede Elektrodengestalt und jedes Dielektrikum und erleidet nur eine Einschränkung durch die Fehlergrenzen, die durch die endliche Behältergröße gezogen sind. Es eignet sich vornehmlich für die Messung kleiner und kleinster Kapazitäten, sowie deren Potentialverteilung in jedem beliebigen Punkte ihres Feldes. Als Beispiel ist die Bestimmung der Kapazität eines Plattenkondensators unter Berücksichtigung der Randwirkung nach dem Widerstandsverfahren durchgeführt worden, daneben sind die Werte der von Kirchhoff angegebenen Formel in der Fassung, wie sie F. Kohlrausch angibt, eingetragen. Es wurde ferner, um die Anwendungsmöglichkeit des Verfahrens zur Messung der Potentialverteilung zu veranschaulichen, die Potentialverteilung zwischen Spitzen von drei verschiedenen Oeffnungswinkeln als Schaubild beigefügt.

Die Potentialverteilungsmessung erscheint auch für überlagerte Dielektrika von verschiedenem ε nicht ungeeignet und dürfte Unterlagen für Nut- und Wicklungsisolations-Berechnungen abgeben können, wenn es gelingt, Elektrolyten verschiedenen Leitvermögens durch stromdurchlässige Membranen zu trennen. Die Bedeutung des Verfahrens für die Beurteilung von Hochspannungsisolatoren gedenkt der Verfasser eingehender zu untersuchen, um an anderer Stelle darüber zu berichten.

Verzeichnis der benutzten Literatur.

Mascart-Joubert, Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme 1896 Bd. I.

Kirchhoff, Gesammelte Abhandlungen 1882.

Petersen, Hochspannungstechnik 1911.

Weicker, Doktor-Dissertation 1910.

Proceedings of the American Institute of Electrical Engineers, Aufsätze von Ryan, Januar 1911; Peek, Juni 1912; Whitehead, Juni 1912.

Physikalische Zeitschrift, Aufsätze von Toepler, 1902, 1903, 1906; Voege 1904.

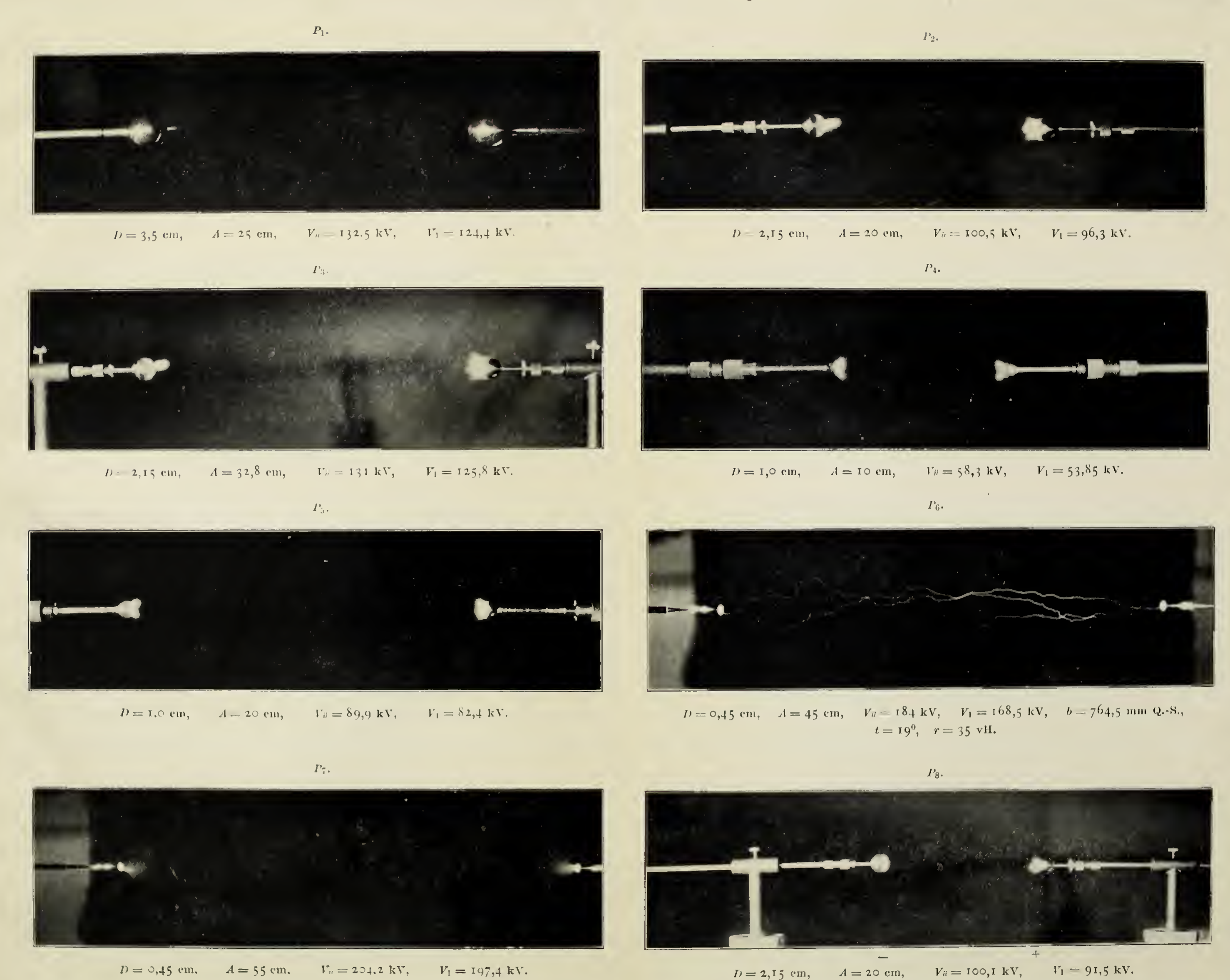
Maxwell, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus 1883.

Der Verfasser wurde bei der vorliegenden Arbeit von mehreren Herren unterstützt.

Hr. Oberlehrer R. Girke machte ihn auf einige einschlägige Quellen in der Literatur aufmerksam und verfolgte die theoretischen Berechnungen. Ihm sei hier ganz besonderer Dank ausgesprochen.

Ebenso den Studierenden Herren Ernst Heckert und A. van den Bungelaar, die teils bei der Ausführung der Versuche und Messungen, teils bei dem Bau der verschiedenen Apparate und Schaltanordnungen dem Verfasser wertvolle Hülfe leisteten.

Buchdruckerei A. W. Schade, Berlin N., Schulzendorfer Str. 26.



P_1.

$D = 3,5$ cm, $A = 25$ cm, $V_{ü} = 132,5$ kV, $V_1 = 124,4$ kV.

P_2.

$D = 2,15$ cm, $A = 20$ cm, $V_{ü} = 100,5$ kV, $V_1 = 96,3$ kV.

P_3.

$D = 2,15$ cm, $A = 32,8$ cm, $V_{ü} = 131$ kV, $V_1 = 125,8$ kV.

P_4.

$D = 1,0$ cm, $A = 10$ cm, $V_{ü} = 58,3$ kV, $V_1 = 53,85$ kV.

P_5.

$D = 1,0$ cm, $A = 20$ cm, $V_{ü} = 89,9$ kV, $V_1 = 82,4$ kV.

P_6.

$D = 0,45$ cm, $A = 45$ cm, $V_{ü} = 184$ kV, $V_1 = 168,5$ kV, $b = 764,5$ mm Q.-S.,
$t = 19^0$, $r = 35$ vH.

P_7.

$D = 0,45$ cm, $A = 55$ cm, $V_{ü} = 204,2$ kV, $V_1 = 197,4$ kV.
$b = 764,5$ mm Q.-S., $t = 18,1^0$, $r = 37,5$ vH.

P_8.

– +

$D = 2,15$ cm, $A = 20$ cm, $V_{ü} = 100,1$ kV, $V_1 = 91,5$ kV.
Aufnahme der Strahlungserscheinungen durch die stroboskopische Scheibe.
Linke Kugel = Kathode, rechte Kugel = Anode


3 0112 072830570